Université de Nantes
Master 2 Histoire des Sciences et des Techniques

Histoire des mathématiques : les courbes (UEC1)
Les grands problèmes de la géométrie grecque et l'invention des courbes
Cours de Évelyne Barbin

Problèmes et théorèmes dans la géométrie grecque

La distinction entre problème et théorème existe dans la géométrie grecque, avec un troisième terme qui est le *porisme*. Voici la classification donnée par Pappus d'Alexandrie au III^{e} siècle (de notre ère) :

> *Les Anciens [..] ont dit que le théorème est une proposition faite en vue d'une démonstration de ce qui est proposé ; que le problème est une proposition faite en vue d'une construction de ce qui est proposé, et que le porisme est une proposition faite en vue de l'acquisition de ce qui est proposé.*[1]

En grec, *proballein* signifie ce que l'on a devant soi, un obstacle, une question, *theôrêma* signifie ce que l'on peut contempler et *theôros* est le spectateur ou le consultant d'un oracle. Selon Pappus, le théorème est donc un énoncé qui réclame une démonstration, alors que le problème st un énoncé qui demande une construction. Ce qui est désigné par « porisme n'est pas très clair, d'autant que les livres sur les porismes écrits par les Grecs ne nous sont pas parvenus. Plusieurs mathématiciens ont essayé de reconstituer ce que pouvaient être les porismes, par exemple Fermat au XVII^{e} siècle et Chasles au XIX^{e} siècle. On retrouve aussi la classification entre problèmes et théorèmes chez Proclus de Lycie au V^{e} siècle[2].

Problèmes de constructions à la règle et au compas

Les géomètres grecs recherchent des constructions géométriques par intersections de droites et de cercles ou, si l'on veut, des constructions à la règle et au compas. Pourquoi la règle et le compas ? Selon Proclus, la figure du cercle est la figure la plus parfaite :

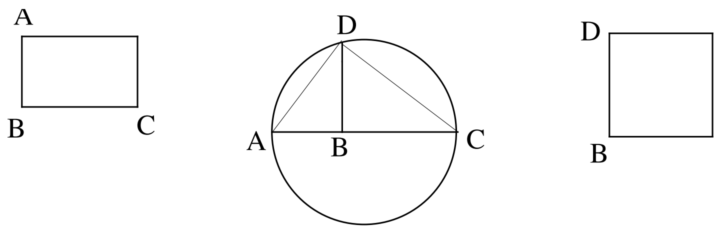
---

[1] Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*, trad. Ver Eecke, Paris, Blanchard, tome II, p. 486.

> *Le cercle est la première, la plus simple et la plus parfaite des figures [...]. Il possède sa supériorité sur les figures établies dans le plan par sa similitude, son identité, et correspond au fini, à l'unité et, en général, à un meilleur arrangement.* [3]

Les deux premières demandes du Livre I d'Euclide affirment la possibilité de mener une ligne droite d'un point à un autre, et la possibilité de mener un cercle de centre et de rayon donnés. Les propositions qui concernent des problèmes de constructions à la règle et au compas sont nombreuses dans les *Éléments* d'Euclide. Elles se mêlent aux autres propositions qui sont des théorèmes. En effet, d'une part, une proposition portant sur une figure n'est énoncée que si la figure en question a été construite à la règle et au compas, et d'autre part, toute construction est justifiée par déduction des propositions qui la précèdent. L'une des constructions les plus importantes d'Euclide est celle du pentagone régulier au Livre IV.

Les problèmes de quadrature pour les figures rectilignes sont résolus dans le Livre II d'Euclide, pour lesquelles il est démontré que l'on peut construire à la règle et au compas un carré de même aire. Ce résultat s'obtient par une succession de constructions, dont l'une des premières est la quadrature d'un rectangle de côtés AB et BC. Pour cela, on aligne AB et BC, on mène un cercle de diamètre AC (dont le milieu est constructible à la règle et au compas) et on mène une perpendiculaire BD à AC. Alors, l'aire du carré de côté BD est égale à l'aire du rectangle de côtés AB et BC. Cette relation géométrique caractérise les points d'un cercle de diamètre AC et, pour cette raison, elle est appelée *symptôme* du cercle.



Certains problèmes de construction qui ont intéressé les géomètres grecs ne sont pas résolubles à la règle et au compas, ce qui a été démontré au XIX^{e} siècle. Mais les géomètres grecs ont inventé des courbes moins simples que le cercle pour obtenir les constructions. Ainsi, le problème de la duplication du cube (construire à la règle et au compas le côté d'un cube ayant un volume double d'un cube donné) a été probablement à l'origine de l'invention des coniques. La quadrature du cercle a été résolue avec la quadratrice d'Hippias, et aussi avec

---

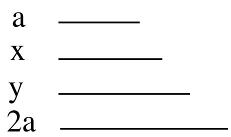
[2] Proclus, *Commentaires sur le premier Livre des Éléments d'Euclide*, trad. Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, p. 69.

[3] Proclus, op.cit., p.131.

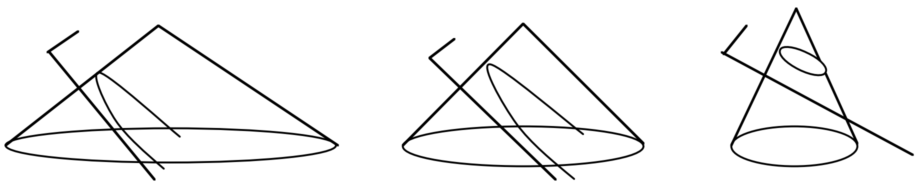
la spirale d'Archimède. La trisection de l'angle (construire deux droites qui intersectent un angle donné en trois angles égaux) a été construite avec la conchoïde de Nicomède.

La duplication du cube et les coniques

Au V^{e} siècle avant J.-C., Hippocrate de Chios montre que le problème de la duplication du cube équivaut à construire deux moyennes proportionnelles entre une droite (finie) donnée et son double. Étant donnés deux segments, a et b, il faut construire deux autres segments x et y tels que a : x :: x : y :: y : 2a.

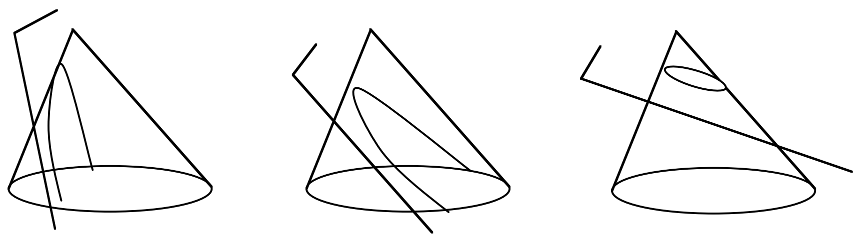


Ménechme, au IV^{e} siècle avant J.-C., résout ce problème par intersection d'une parabole et d'une hyperbole. Ménechme introduit les coniques comme intersection de divers cônes droits par un même type de section, à savoir par un plan perpendiculaire à une génératrice du cône :



cône droit obtusangle   cône droit rectangle   cône droit aigu

Tandis que Apollonius au III^{e} siècle avant J.-C. définit les coniques à partir d'un même cône, mais par divers types de sections :



hyperbole   parabole   ellipse

Les coniques d'Apollonius

L'étude des coniques fait l'objet de l'ouvrage d'Apollonius au III^{e} siècle avant J.-C., intitulé *Les coniques*. La parabole est obtenue en intersectant un cône de sommet A par un premier plan passant par A et par un diamètre ΒΓ de la base circulaire du cône, puis par un second plan parallèle à ΑΓ et passant par ΗΔ perpendiculaire à ΒΓ. L'intersection de ce plan avec le cône est définie comme une parabole[4]. Soit Z le point de la parabole qui est sur AB, Apollonius appelle *côté droit de la parabole* un segment ZQ tel que

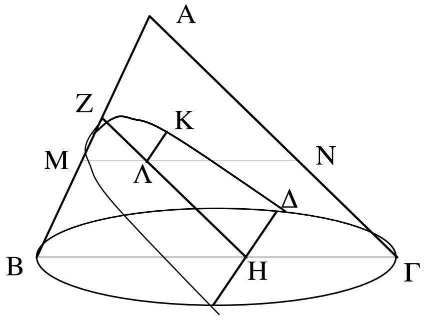
ZQ : ZA :: aire carré BΓ : aire rectangle (BA, AΓ)

et ZH le *diamètre* de la parabole.

Soit K un point de la parabole et soit KΛ parallèle à HΔ, alors on a :

aire carré KΛ = aire rectangle (ZQ, ZΛ)

Cette relation, caractéristique des points de la parabole, est appelée *symptôme* de la parabole.



La démonstration de cette relation résulte de trois arguments. Le premier consiste à remarquer que, puisque MN est parallèle à BΓ, alors M, N et K sont sur un même cercle. Le deuxième est l'utilisation du symptôme du cercle :

aire carré KΛ = aire rectangle (ΛM, NΛ)

Le troisième utilise le théorème de Thalès et la similitude :

BΓ : AΓ :: MΛ : ZΛ et BΓ : BA :: MΛ : MZ :: NΛ : ZA.

Apollonius donne et justifie les symptômes des trois coniques. Ces symptômes indiquent une égalité, un dépassement ou une diminution par rapport au carré, et ils donnent leurs noms aux différentes coniques. En effet, *paraballein* (à côté) signifie comparer et donne *parabole* (ce qui est comparable), *hyperballein* (au-dessus) signifie dépasser et donne *hyperbole* (ce qui est excessif), *elleipsis* signifie négliger et donne *ellipse* (ce qui manque).

La construction de deux moyennes proportionnelles par parabole et par cissoïde

Le livre II des *Commentaires d'Eutocius d'Apsalon sur le traité de la sphère et du cylindre* du V^{e} siècle contient un commentaire du traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède[5]. Le problème d'Archimède considéré est de construire un cylindre valant une fois et demie un cône ou un cylindre donné. Il est ramené au problème général de la construction de deux

---

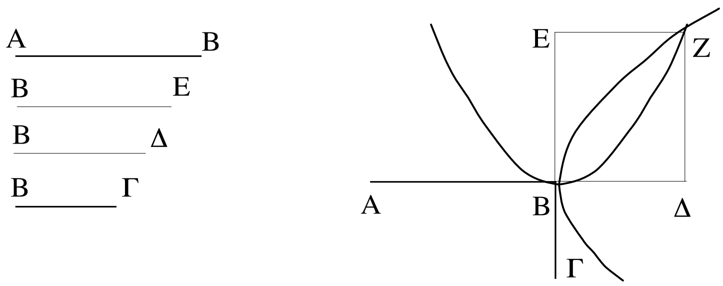
[4] Apollonius, *Les coniques*, trad. Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1959, pp. 21-24.

[5] Le texte d'Eutocius se trouve dans Archimède, *Œuvres complètes*, trad. Ver Eecke, tome II, Vaillant-Carmanne, Liège, 1960, pp. 555- 696.

moyennes proportionnelles à deux droites (finies) données a et b, c'est-à-dire de construire deux droites x et y telles que :

$$a : x :: x : y :: y : b.$$

Eutocius présente les mécanismes introduits pour résoudre ce problème, ceux de Platon, d'Héron d'Alexandrie, de Pappus d'Alexandrie, d'Ératosthène et de Nicomède. Il indique aussi la solution par intersection de deux paraboles.



Le raisonnement procède par analyse. En effet, les géomètres grecs distinguent deux voies de déduction pour la démonstration, l'analyse qui va de ce que l'on veut démontrer à ce que l'on a déjà démontré, et la synthèse qui, au contraire, va de ce que l'on a démontré à ce que l'on cherche à démontrer [6]. Ici, on se donne deux segments AB et BΓ, et on cherche à construire deux segments BE et BΔ tels que :

$$AB : BE :: BE : B\Delta :: B\Delta : B\Gamma.$$

D'après la proposition 16 du livre VI d'Euclide (dans une proportion, le rectangle compris sous les grandeurs moyennes est égal au rectangle sur les deux extrêmes) on a :

$$\text{aire carré } BE = \text{aire rectangle } (AB, B\Delta)$$

Soit BΔZE le rectangle de côtés BE et BΔ. On a :

$$\text{aire carré } Z\Delta = \text{aire rectangle } (AB, B\Delta),$$

donc Z est sur une parabole de *diamètre* BΔ et de *côté droit* AB. De même :

$$\text{aire carré } ZE = \text{aire carré } B\Delta = \text{aire rectangle } (BE, B\Gamma)$$

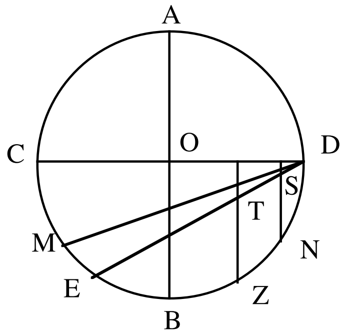
donc Z est sur une parabole de *diamètre* BE et de *côté droit* BΓ. Ainsi, la construction de deux moyennes proportionnelles s'obtient par l'intersection de deux paraboles. Dans le cas particulier, où on prend AB double de BΓ, on obtient la duplication du cube.

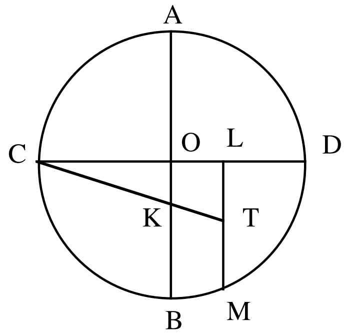
Eutocius donne aussi la solution de Dioclès de la fin du II^{e} siècle pour construire deux moyennes proportionnelles à partir d'une courbe appelée cissoïde (du grec *kossis*, c'est-à-dire le lierre). Étant donné un cercle de diamètres perpendiculaires AB et CD, considérons une parallèle à AB menée à partir d'un point Z de l'arc BD, et une droite ED telle que l'arc EB soit égal à l'arc BZ. Ces deux dernières droites se coupent en un point T. Les autres points

---

[6] Voir Pappus, *La collection mathématique*, tome II, op. cit., p.475.

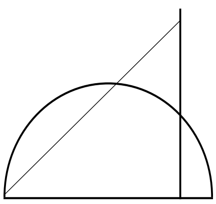
obtenus de la même manière, comme le point S, sont des points de la cissoïde qui va de D à B. Pour trouver la moyenne proportionnelle entre deux droites AO et OK, on construit la cissoïde qui joint D à B, le prolongement de la droite CK coupe la cissoïde en un point T d'où l'on mène ML parallèle à OB, alors les moyennes proportionnelles entre AO et OK sont proportionnelles à ML et LD (dans le rapport OC : OL)[7].



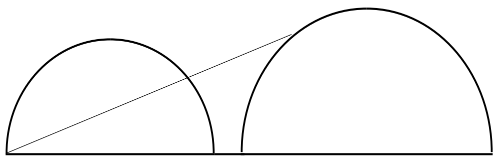


Les problèmes de *neusis* (inclinaison) et la trisection d'un angle

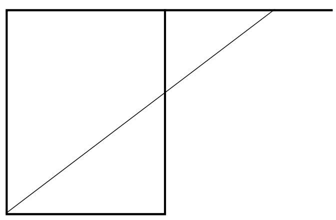
Pappus rapporte quatre problèmes de *neuseis* (inclinaisons), auxquels se serait intéressé Apollonius. Le premier consiste à intercaler un segment de longueur donnée, porté par une droite pivotant autour d'un point fixe, entre un cercle et une droite donnée (I), le second entre deux cercles donnés (II), le troisième entre un rectangle et le prolongement d'un côté du rectangle (III). Le quatrième problème consiste à construire une corde de longueur donnée et passant par un point donné intérieur à un cercle donné (IV).



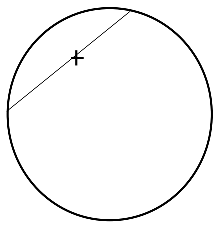
I



II



III

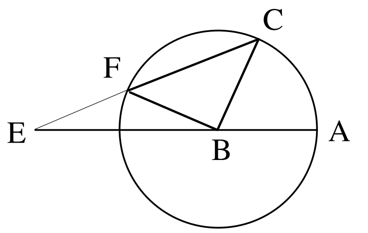


IV

[7] Archimède, op. cit., pp. 596-597.

Hippocrate de Chios aurait résolu ces problèmes au Ve siècle avant J.-C, en utilisant une règle marquée. La construction de III s'obtient aussi par intersections de coniques.

La trisection d'un angle peut s'obtenir par une *neusis*, attribuée à Archimède[8]. Étant donné un angle ABC à trisecter, construisons un cercle de centre B, prolongeons le rayon AB et intercalons, entre ce prolongement et le cercle, un segment EF égal à AB. Alors l'angle AEC est le tiers de l'angle ABC. En effet, le triangle EFB est isocèle, donc l'angle AEC est égal à l'angle FBE, et l'angle BFC est égal à la somme des angles AEC et FBE (car la somme des trois angles du triangle FBE vaut deux angles droits), donc à deux fois l'angle AEC. De plus, l'angle BFC est égal à l'angle BCF (car le triangle BFC est isocèle), donc à deux fois l'angle AEC. Par conséquent, l'angle ABC, qui est la somme des angles BCF et AEC, est égal à trois fois l'angle AEC

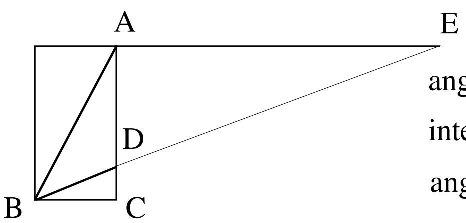


angle ABC donné

intercaler EF = AB

angle CEA tiers de angle ABC

Une autre solution du problème de la trisection par inclinaison et intercalation est rapportée par Pappus[9]. Étant donné un angle ABC à trisecter, construisons un rectangle sur BC de diagonale AB, puis intercalons entre le prolongement du côté opposé à BC et AC un segment DE égal à deux fois le segment AB. Alors, l'angle EBC est le tiers de l'angle ABC. En effet, soit O le milieu de DE, construisons le cercle de diamètre DE et de centre O, il passe par A. L'angle AED est égal à l'angle OAE et l'angle AOB est égal à la somme des angles AED et OAE, donc à deux fois l'angle AED. Puisque AB est égal à AO (on a pris DE égal à deux fois AB), le triangle AOB est isocèle et donc l'angle ABE est égal à l'angle AOB, soit deux fois l'angle AED. Enfin, l'angle EBC est égal à l'angle AEB (BE est sécante aux parallèles AE et BC), donc à la moitié de l'angle ABE ou encore le tiers de l'angle ABC.



angle ABC donné

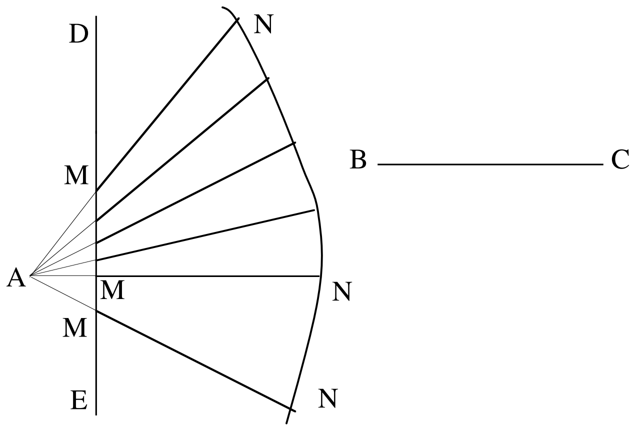
intercaler DE = 2 AB

angle EBC tiers de angle ABC

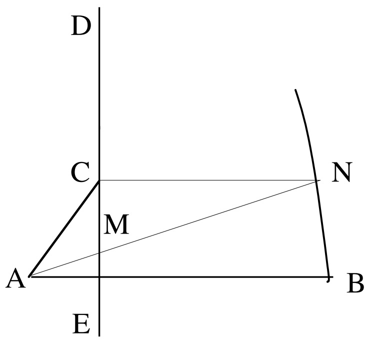
La conchoïde de Nicomède et la trisection de l'angle

[8] Archimède, tome II, op.cit., pp.532-533.

La conchoïde est introduite par Nicomède au II^e siècle avant J.-C.. On se donne trois objets : un point A, une droite DE et un segment BC. Pour chaque point M de DE prolongeons AM jusqu'au point N tel que NM égale BC. La courbe qui joint les points N est une *conchoïde* (c'est-à-dire en forme de coquillage).

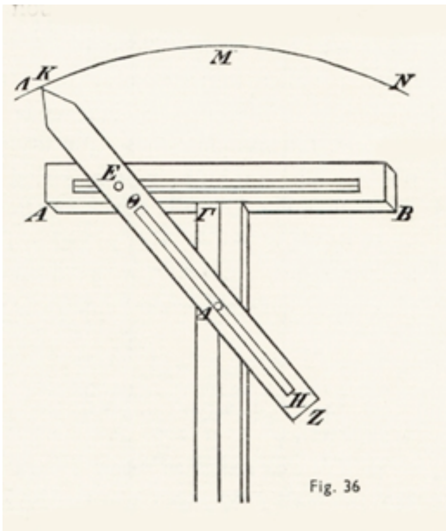


Pour trisecter un angle CAB, construisons point par point la conchoïde pour le point A, une perpendiculaire DE à AB et un segment égal à deux AC, puis menons CN parallèle à AB et la droite AN (MN égale à deux AC), alors l'angle NAB est le tiers de l'angle CAB. La démonstration est analogue à celle pour l'intercalation de Pappus.



Le mécanisme de Nicomède pour construire une conchoïde est exposé par Eutocius d'Ascalon dans ses *Commentaires sur le traité de la sphère et du cylindre*[10]. La réglette EZ coulisse sur deux réglettes perpendiculaires de sorte que KE a une longueur constante.

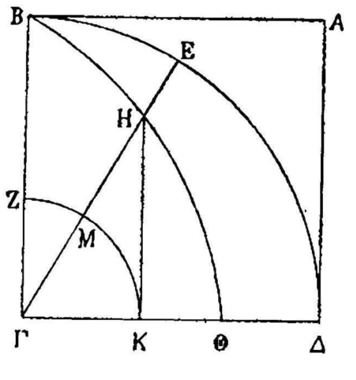
[9] Pappus, tome I, op. cit., pp. 210-211.
[10] Archimède, tome II, op. cit., pp. 615-616.



Eutocius montre que la conchoïde permet aussi de construire deux moyennes proportionnelles à deux droites (finies) données, et donc qu'elle permet de dupliquer un cube[11].

La quadratrice d'Hippias

La quadratrice d'Hippias date du V^{e} siècle avant J.-C.. Considérons ΑΒΓΔ un carré et deux mouvements uniformes (vitesse constante) concomitants (ils commencent et se terminent ensemble) : ΒΑ descend parallèlement à ΓΔ et ΓΒ tourne autour de Γ. Alors, les intersections Η de ΒΑ descendue et ΓΒ tournée sont les points de la quadratrice.



Par construction, si ΗΚ est parallèle à ΒΓ nous avons la propriété fondamentale :

ΗΚ : ΒΓ :: arc ΕΔ : arc ΒΔ

Soit Θ le prolongement de la quadratrice jusqu'à ΓΔ, cette propriété permet de démontrer[12] que

ΒΓ : ΓΘ :: arc ΒΔ : ΒΓ.

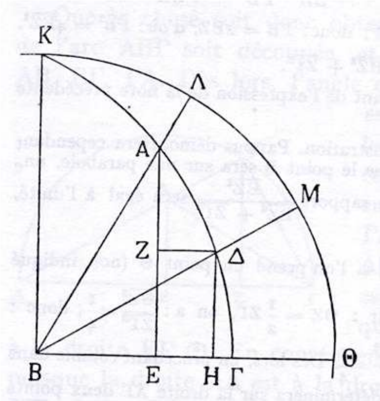
[11] Archimède, tome II, op. cit., pp. 618- 620.
[12] Pappus, op. cit. pp. 192-196.

Par conséquent le segment S construit (à la règle et au compas) de sorte que

$$B\Gamma : \Gamma\Theta :: S : B\Gamma$$

est égal à l'arc BΔ, et donc le quadruple de S est égal à la circonférence du cercle entier.

La quadratrice permet de trisecter un angle[13]. En effet, soit ΛBΘ un angle à trisecter, considérons la quadratrice KΓ qui coupe ΛB en A. Construisons (à la règle et au compas) EZ égal au tiers de AE. La parallèle à BΘ menée de Z rencontre la quadratrice en Δ. Alors ΔH, parallèle à BK, est le tiers de AE et l'angle MBΘ est le tiers de l'angle ΛBΘ.



En effet, d'après la propriété fondamentale de la quadratrice :

$$AE : KB :: \text{arc } \Lambda\Theta : \text{arc } K\Theta \text{ et } \Delta H : KB :: \text{arc } M\Theta : \text{arc } K\Theta$$

donc :

$$AE : \Delta H :: \text{arc } \Lambda\Theta : \text{arc } M\Theta :: \text{angle } \Lambda B\Theta : \text{angle } MB\Theta.$$

En conclusion, les fameux problèmes de construction de la géométrie grecque n'ont pas pu être construits à la règle et au compas, mais ils ont cependant été au départ de l'invention de courbes. Nous verrons dans le prochain cours un autre exemple, avec la spirale d'Archimède.

[13] Pappus, op. cit. , pp.222-223.