



Représentation- Transformation d'images

Table des matières

Objectifs	5
I - Modèle mathématique pour les images fixes en niveaux de gris.	7
II - Transformées en ondelettes discrètes	9
A. Généralité sur l'analyse multirésolution orthogonale dans $L_2(\mathbb{R})$	10
1. La fonction d'échelle et les espaces.....	10
2. La fonction ondelette et les espaces.....	11
B. Algorithmes d'analyse et synthèse en ondelettes discrètes par l'approche "bancs de filtres".....	12
1. Description des algorithmes.....	12
2. Extension périodique ou symétrique du signal.....	13
C. Ondelettes et bancs de filtres.....	14
D. Construction et présentation de quelques ondelettes.....	15
1. Ondelettes orthogonales.....	16
2. Quelques ondelettes orthogonales.....	17
3. Ondelettes biorthogonales.....	18
4. Quelques ondelettes biorthogonales.....	20
5. Ondelettes sur un intervalle.....	21
E. Transformées en ondelettes par l'approche de "Lifting Scheme".....	22
1. Factorisation des transformées en ondelettes discrètes par l'approche "Lifting Scheme" (TODLS).....	22
III - Transformées en paquets d'ondelettes discrètes	33
A. Les paquets d'ondelettes.....	33
B. Détermination des coefficients de la décomposition en paquets d'ondelettes d'un signal monodimensionnel x	35
C. Notion de fonction de coût d'information additive.....	36
1. Quelques exemples de fonctions de coût.....	36

Objectifs



Dans ce module, on propose un modèle mathématique pour les images fixes en niveaux de gris qui correspondent à la catégorie d'images rencontrées dans les différentes applications de télédétection. Nous allons aussi introduire les outils fondamentaux permettant d'assurer les représentations d'images notamment les transformations d'images. Les transformations visées dans le cadre de ce cours sont celles qui facilitent la compression d'images en réalisant une décomposition linéaire de l'image dans une base de fonctions permettant d'obtenir une représentation compacte de celle-ci. Nous étudierons successivement la transformée Cosinus Discrète, les transformées en ondelettes discrètes, les transformées en paquets d'ondelettes.

Modèle mathématique pour les images fixes en niveaux de gris.

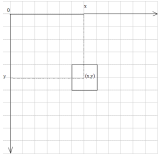


On peut modéliser une image fixe en niveaux de gris comme une fonction bidimensionnelle d'intensité lumineuse ou d'amplitude d'un signal retrodiffusé vers un capteur.

$$I: [0, a] \times [0, b] \rightarrow [0, I_{max}]$$
$$(x, y) \rightarrow I(x, y)$$

a , b et I_{max} sont des réels positifs. a et b correspondent respectivement à la largeur et la hauteur de l'image.

Les coordonnées (x, y) correspondent à un pixel de l'image, conventionnellement en traitement d'images, l'axe des ordonnées est orienté de haut en bas et l'axe des abscisses de gauche à droite. (voir figure ci-dessus).



(x, y) représente les coordonnées spatiales, $I(x, y)$ est appelée représentation spatiale de l'image. Il peut s'agir d'une photographie aérienne, d'une image Radar à Synthèse d'Ouverture, d'une composante d'images multispectrales ou simplement un champ scalaire quelconque.

Dans le cadre de ce module nous faisons l'hypothèse simplificatrice que la mesure $I(x, y)$ est déterministe, dans certaines applications de traitement d'images, on pourrait modéliser $I(x, y)$ comme une réalisation d'un champs Markovien.

Transformées en ondelettes discrètes



Généralité sur l'analyse multirésolution orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$	10
Algorithmes d'analyse et synthèse en ondelettes discrètes par l'approche "bancs de filtres"	12
Ondelettes et bancs de filtres	14
Construction et présentation de quelques ondelettes	15
Transformées en ondelettes par l'approche de "Lifting Scheme"	22

Les transformées ondelettes permettent un champs vaste d'applications, en physique théorique, calcul scientifique, traitement du signal notamment en compression de la parole, des images et des scènes tridimensionnelles.

L'idée de l'analyse ondelettes est de décomposer un signal sur une base de fonction d'un espace fonctionnel ayant des propriétés bien déterminées. Il s'agit d'analyser un signal en cherchant une représentation plus compacte localisé simultanément en temps et en fréquence au principe d'Heisenberg près. Les fonctions de bases de l'espace fonctionnel utilisé sont appelées ondelettes. La construction est issues des translations et dilatations de fonctionnel utilisé sont appelé ondelettes. La construction est issue des translations et dilatations de fonctions mères Φ, Ψ appelées respectivement fonction d'échelle mère et ondelette mère. Les fonctions Φ, Ψ sont des fonctions génériques qui peuvent être éventuellement vectorielles, auquel cas les ondelettes associées sont appelées multiondelettes qui seront abordés dans le chapitre suivant. Nous présentons essentiellement dans ce cours les décompositions ondelettes dyadiques qui sont les plus utilisés en traitement d'images pour la compression, on notera $x_{2l} = s_l^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{4} d_l^{(1)} - \frac{(\sqrt{3}-2)}{4} d_{l+1}^{(1)}$ la version de $\Phi_{jk}(x) = 2^{(j/2)} \Phi(2^j x - k)$ à la résolution j , translatée de k , $k, j \in \mathbb{Z}$, de même on définit $\Psi_{j,k}$ pour Ψ

Il existe plusieurs façons d'introduire les ondelettes, à travers l'analyse multirésolution, l'approche par bancs de filtres ou via l'approche << Lifting scheme >> .

Ce chapitre développe d'une part la théorie des ondelettes, d'autre part il présente l'utilisation de cet espace comme modèle de représentation pour la résolution du problème génériques de compression présenté au chapitre 3. Son objectif est de fournir un ensemble cohérent de concepts, méthodes et algorithmes qui seront utilisés dans notre méthodologie de compression des images RSO basée sur la

transformation en ondelettes discrète.

Il est décrit dans une première partie la théorie des ondelettes en mettant l'accent sur les aspects pratiques, les considérations théoriques pures se trouvant dans les ouvrages et articles de référence . Nous rappelons la théorie sous-jacente aux transformations ondelettes. Nous montrons comment à partir d'une analyse multirésolution, on peut mettre en œuvre la transformée en ondelettes discrète (TOD). Nous examinerons spécifiquement plusieurs familles orthogonales, bi-orthogonales, sur la droite \mathbb{R} ou sur un intervalle de \mathbb{R}

Dans une deuxième partie nous présenterons des algorithmes de compressions d'images RSO basés sur les transformations en ondelettes discrètes, certains utilisant la transformée en ondelettes mise en oeuvre par l'approche « Bancs de filtres», les autres basés sur une implémentation par l'approche « Lifting Scheme ».

A. Généralité sur l'analyse multirésolution orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$

L'analyse multirésolution est abordée selon l'approche de Ingrid Daubechies, cependant nous notons par $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$ les filtres d'analyse et H,G les filtres de synthèse. Dans ces conditions $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$ représentent respectivement la fonction d'échelle d'analyse et la fonction ondelettes d'analyse.

Pour les démonstrations et de plus amples détails se reporter aux références [39, 40, 41].

En analyse multirésolution on cherche à approximer les fonctions f de $L^2(\mathbb{R})$, il s'agit d'écrire f comme une limite d'approximations successives de fonctions de bases de plus en plus concentrées. Les approximations successives utilisent alors différentes résolutions, d'où le concept d'analyse multirésolution.

1. La fonction d'échelle et les espaces

Une analyse multirésolution consiste en :

- Une famille d'espace clos imbriqués les uns dans les autres $V_j \subset L^2(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \quad (4.1)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

où \overline{V} est la fermeture de V .

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

- L'existence d'une fonction $\Phi \in V_0$ telle que, pour $k, j \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des $\Phi_{j,k}$ avec $\Phi_{j,k}(x) = 2^{(j/2)} \Phi(2^j x - k)$ constitue une base inconditionnelle de V_j , c'est à dire : $V_j =$ combinaison linéaire $\{\Phi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ et il existe $0 < A \leq B < +\infty$ tels que : $\forall (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}, A \sum_k |c_k|^2 \leq \|\sum_k c_k \Phi_{jk}\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2$ (4.3)

Soit P_j l'opérateur de projection orthogonale sur V_j . D'après (4.1) et (4.2), on a : $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$, pour tout f de $L^2(\mathbb{R})$. la condition (4.2) assure que les V_j correspondent à la différentes résolutions, tandis que l'invariance par translation, $f \in V_j \Rightarrow f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j \forall k \in \mathbb{Z}$ est une conséquence de (4.2) et (4.3).

De cette définition, on peut faire les observations suivantes :

Comme $\Phi \in V_0 \subset V_1$, il existe une suite $\{h_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$ de telle sorte que la fonction d'échelle satisfait la relation :

$$\Phi(x) = 2 \sum_k h_k \Phi(2x - k), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cette équation fonctionnelle est appelé équation de raffinement ou équation de dilatation. La collection des fonctions $\Phi(x-l), l \in \mathbb{Z}$ est une base de Riesz de V_0

La fonction d'échelle est, sous des considérations très générales, définie par l'équation de raffinement et la normalisation (4.5),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) dx = 1 \quad (4.5)$$

Si on note $\hat{\Phi}$ la transformation de Fourier de Φ . La relation (4.5) est l'équivalent à $\hat{\Phi}(0) = 1$

Dans de nombreux cas l'expression analytique de Φ n'est pas disponible. Toutefois, il existe des algorithmes rapides basés sur l'équation de raffinement pour évaluer Φ aux points dyadiques [42,43] $\{x = 2^{-j}k; j, k \in \mathbb{Z}\}$. En fait dans la plupart des applications, on ne travaille jamais avec Φ mais directement avec les h_k .

De manière à pouvoir utiliser la famille $\{\Phi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$ pour l'approximation des fonctions simples comme des fonctions constantes, on suppose que les translatées entière de la fonction d'échelle forment une partition de l'unité, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_k \Phi(x-l) = 1$$

Par la formule sommatoire de Poisson, la partition de l'unité est équivalent à :

$$\hat{\Phi}(2\pi k) = \delta_k, k \in \mathbb{Z} \quad (4.6)$$

Par la relation (4.4), la transformée de Fourier de Φ doit satisfaire :

$$\hat{\Phi}(\omega) = H(\omega/2) \hat{\Phi}(\omega/2) \quad (4.7)$$

où H est une fonction 2π - périodique définie par :

$$H(\omega) = \sum_k h_k e^{-ik\omega}$$

Comme $\hat{\Phi}(0) = 1$, on peut appliquer récursivement (4.7). Ce qui conduit à :

$$\hat{\Phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega)$$

La convergence de ce produit est examinée en détail dans [44]. Cette formule peut être utilisée pour générer Φ à partir des h_k . De (4.6), (4.7) on déduit qu'on obtient une partition de l'unité si :

$$H(\pi) = 0 \text{ ce qui est équivalent à } \sum_k (-1)^k h_k = 0$$

on remarque aussi que $H(0) = 1$.

2. La fonction ondelette et les espaces

On note W_j l'espace complémentaire de V_j dans V_{j-1} , il vérifie donc :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

où le symbole \oplus signifie somme directe. Cela veut

dire que l'espace W_j contient la différence d'information entre une approximation à la résolution j et une approximation à la résolution $j-1$. Par conséquent,

$$\oplus W_j = L^2(\mathbb{R}) .$$

Une fonction Ψ est une ondelette si l'ensemble de fonctions $\{\Psi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz. Comme Ψ est un élément de V_1 , il existe une séquence $g_k \in l^2(\mathbb{Z})$ telle que :

$$\Psi(x) = 2 \sum_k g_k \Phi(2x-k) \quad (4.9)$$

De plus on souhaite que la fonction $\Psi(t)$ ait un nombre N de moments nuls. Ce nombre caractérise l'ordre de régularité de l'ondelette et en même temps l'ordre d'approximation des fonctions d'échelle $\Phi(t-k), k \in \mathbb{Z}$. Une ondelette sera d'autant plus régulière que ce nombre sera élevée. On doit avoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) x^l dx = 0, , l=0,1,2, \dots, N-1$$

ce qui est équivalent à $\hat{\Psi}^{(l)}(0) = 0$ pour $l=0,1,\dots,N-1$

La transformée de Fourier d'une ondelette vérifie la relation :

$$\hat{\Psi}(\omega) = G(\omega/2) \hat{\Phi}(\omega/2) \quad (4.10)$$

où G est une fonction 2π - périodique :

$$G(\omega) = \sum_k g_k e^{-ik\omega}$$

De (4.10) et (4.6) on a $G(0) = 0$ ou $\sum_k g_k = 0$

On définit P_j et Q_j les opérateurs de projection sur V_j et W_j . Une fonction f peut être alors écrite :

$$f(x) = \sum_j Q_j f(x) = \sum_{j,l} d_{j,l}^l \Psi_{j,l}(x)$$

Dans la pratique, les indices j et l ne sont jamais infinis. Par conséquent, si on arrête au niveau L , on est obligé de tronquer cette somme en :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{j=L} Q_j f(x) + P_L = \sum_{j=0}^{j=L} \sum_k d_k^j \Psi_{j,k} + \sum_m c_m^L \Phi_{L,m}, L \in \mathbb{Z}$$

Notons toutefois que le nombre de fonctions $\Phi_{j,k}, \Psi_{j,k}$ n'est non plus infini : pour bien projeter une fonction f , il suffit que les translatées de Φ_{j_0}, Ψ_{j_0} couvrent le domaine de définition de f . Le calcul des coefficients c_k^j, d_k^j est explicité dans le paragraphe suivant.

Les valeurs des suites $\{h_k\}, \{g_k\}$ sont appelés coefficients de filtre h et g compte tenu de l'analogie avec les bancs de filtres qui sera présentée dans la section 4.5.

B. Algorithmes d'analyse et synthèse en ondelettes discrètes par l'approche "bancs de filtres"

Nous présentons l'algorithme de décomposition et synthèse en ondelettes discrètes de S. Mallat [45]. On décompose un signal discret $C^0 = (c_n^0)_{n \in l^2(\mathbb{Z})}$ en différents

niveaux de résolutions correspondant à différentes bandes de fréquences spatiales. Pour y parvenir on utilise l'analyse multirésolution. On suppose qu'on a choisi des espaces V_m et une fonction Φ tels que (4.1) - (4.3) soient satisfaits.

On suppose que les $\Phi_{0,n}$ sont orthogonaux ou éventuellement bi-orthogonaux (voir section 4.5) et soit $\{\Psi_{m,n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ une base orthogonale ou bi-orthogonale d'ondelettes associées.

A partir de la séquence $C^0 \in l^2(\mathbb{Z})$, on forme la fonction.

$$f = \sum_n c_n^0 \Phi_{0,n} \quad (4.11)$$

$$\text{où } f(x) = \sum_n c_n^0 \Phi(x-n)$$

Cette fonction est un élément de V_0 . Comme tout élément $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être approximé avec le degré de précision désiré par un $f_N \in V_N, N \in \mathbb{Z}$

Comme $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z}$. f_N a une décomposition unique :

$$f_N = f_{N-1} + r_{N-1} \text{ avec } f_{N-1} \in V_{N-1}, r_{N-1} \in W_{N-1}$$

En répétant ce processus on a :

$$f_N = r_{N-1} + r_{N-2} + \dots + r_{N-L} + f_{N-L} \quad (4.12)$$

$$\text{où } f_j \in V_j, r_j \in W_j, \forall j$$

La décomposition (4.12) est unique et est appelée décomposition en ondelettes discrètes de f .

Comme $\Phi \in V_0$ et $\Psi \in W_0$ sont des éléments de V_1 . Il existe deux suites $\{h_k\}, \{g_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$ telles que :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_k h_k \Phi(2x-k) \\ \Psi(x) &= \sum_k g_k \Phi(2x-k) \end{aligned} \quad (4.13)$$

D'autre part, comme $\Phi(2x), \Phi(2x-1)$ sont des éléments de V_1 et $V_1 = V_0 \oplus W_0$, il existe quatre suites notées $\{\tilde{h}_{-2k}\}, \{\tilde{g}_{-2k}\}, \{\tilde{h}_{1-2k}\}, \{\tilde{g}_{1-2k}\}$, tels que :

$$\Phi(2x) = \sum_k \tilde{h}_{-2k} \Phi(x-k) + \tilde{g}_{-2k} \Psi(x-k), \forall l \in \mathbb{Z} \quad (4.14)$$

$$\Phi(2x-1) = \sum_k \tilde{h}_{1-2k} \Phi(x-k) + \tilde{g}_{1-2k} \Psi(x-k) \quad (4.15)$$

Les formules (4.14) et (4.15) peuvent être combinées en une seule de la manière suivante :

$$\Phi(2x-l) = \sum_k \tilde{h}_{l-2k} \Phi(x-k) + \tilde{g}_{l-2k} \Psi(x-k), \forall l \in \mathbb{Z} \quad (4.16)$$

Cette formule est appelée relation de décomposition.

Considérons maintenant les suites $\{h_k\}, \{g_k\}, \{\tilde{h}_k\}, \{\tilde{g}_k\}$ qui sont d'ailleurs uniques compte tenu de la relation $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

Ces suites seront utilisées pour définir la relation de reconstruction (synthèse). $\{h_k\}, \{g_k\}$ sont appelées suites de synthèse (ou filtres de synthèse par analogie à la théorie des bancs de filtres), $\{\tilde{h}_k\}, \{\tilde{g}_k\}$ sont appelées suites d'analyse (ou filtres d'analyse).

1. Description des algorithmes

Pour la description des algorithmes, rappelons que $f_j \in V_j, r_j \in W_j$ sont représentées par des suites uniques $(c_k^j), (d_k^j), k \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_j(x) = \sum_k c_k^j \Phi(2^j x - k) \\ C^j = \{c_k^j\} \in l^2(\mathbb{Z}) \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_j(x) = \sum_k d_k^j \Psi(2^j x - k) \\ D^j = \{d_k^j\} \in l^2(\mathbb{Z}) \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

On a volontairement supprimé les coefficients $2^{j/2}$ en écrivant simplement $\Phi(2^j x - k), \Psi(2^j x - k)$, pour ne pas manipuler un multiple de $\sqrt{2}$ dans la mise en oeuvre des algorithmes. On a alors les formules de décomposition et de synthèse suivantes :

Décomposition (passage de la résolution j à j-1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_k^{j-1} = \sum_l h_{l-2k} \tilde{c}_l^j \\ d_k^{j-1} = \sum_l g_{l-2k} \tilde{c}_l^j \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Reconstruction (passage de la résolution j à j-1) :

$$c_k^j = \sum_l (h_{k-2l} c_l^{j-1} + h g_{k-2l} d_l^{j-1}) \quad (4.20)$$

2. Extension périodique ou symétrique du signal

En pratique, les signaux sont toujours finis ; aussi se pose le problème délicat des effets de bord : que se passe-t-il aux bords du signal lorsque les filtres doivent être convolués à des échantillons qui n'existent pas ? Il y a plusieurs réponses :

- On prolonge le signal au delà des bords par des zéros. cet extension engendre des discontinuités qui vont se répercuter de niveaux en niveaux
- On périodise le signal en le répétant de chaque côté du tableau contenant les échantillons. Cette solution est intéressante, mais peut éventuellement entraîner un effet d'aliasing du signal si certaines conditions ne sont pas vérifiées. La périodisation introduit souvent des discontinuités dans le signal aux bords car le signal n'est généralement pas le même à chaque extrémité.
- On symétrise le signal par rapport aux bords respectifs. Par la symétrie, on va avoir un effet de lissage aux bords sur les coefficients transformés. Ce lissage peut s'avérer désastreux sur le plan fréquentiel et provoquer une mauvaise reconstruction aux bords.

Pour pallier à ces inconvénients, des approches basées sur la construction des ondelettes sur un intervalle existent dans la littérature [46,47]. Un algorithme rapide sur les ondelettes biorthogonales B-splines de degré arbitraire sur un intervalle a été développé dans nos travaux antérieurs [48].

TOD des signaux uni-dimensionnels

A partir d'un vecteur initial contenant 2^N échantillons, on crée deux sous vecteurs de 2^{N-1} échantillons. L'un est obtenu en filtrant passe-bas (avec le filtre h) et l'autre en filtrant passe bande (avec le filtre g). On répète cette procédure sur la version passe-bas. On voit donc que dans le cas discret, on ne peut faire plus de N niveaux de décompositions.

TOD des signaux bidimensionnels

Pour réaliser une TOD en deux dimensions, il y a deux possibilités :

1. La méthode du quinconce
 Cette méthode consiste à utiliser des filtres de même dimension que le signal à analyser. Le nombre d'opérations nécessaires au filtrage est assez important. Pour cette raison on lui préfère bien souvent la deuxième méthode.
2. La méthode de la séparabilité du noyau
 Elle consiste à réaliser une T.O.D 1D dans chacune des dimensions du signal. Pour une image, on réalise une T.O.D sur chaque ligne puis sur les colonnes. Un des avantages de cette méthode est qu'elle est directive en fréquence :
 On utilise le produit tensoriel des fonctions d'échelle mère et ondelette mère.

On obtient :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \Phi(x)\Phi(y) \\ \Psi_{Hori}(x, y) &= \Phi(x)\Psi(y) \\ \Psi_{Vert}(x, y) &= \Psi(x)\Phi(y) \\ \Psi_{Diag}(x, y) &= \Psi(x)\Psi(y) \end{aligned} \quad (4.21)$$

On considère les versions dilatées et translatées :

$$\begin{aligned} \Phi_{j,k,l}(x, y) &= \Phi_{j,k}(x)\Phi_{j,l}(y), \\ \Psi_{j,k,l}(x, y) &= \{\Psi_{j,k}(x)\Psi_{j,l}(y), \Psi_{j,k}(x)\Phi_{j,l}(y), \Phi_{j,k}(x)\Psi_{j,l}(y)\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\{\Phi_{0,k,l}, \Psi_{j,k,l}\}_{j < 0, k, l \in \mathbb{Z}}$ forme une analyse multirésolution en 2D.

C. Ondelettes et bancs de filtres

La théorie des ondelettes trouve ses fondements dans la théorie des bancs de filtres utilisés en traitement du signal. L'idée est de séparer le signal en plusieurs bandes de fréquence (typiquement basse fréquence et haute fréquence) pour mieux le compacter et le transmettre. Au récepteur, on reconstruit le signal en rassemblant ces diverses bandes.

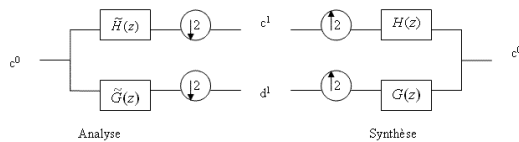


Figure 4.1 - Schéma d'analyse et de synthèse en ondelettes par l'approche banc de filtres

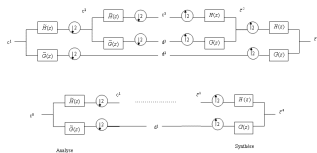


Figure 4.2 Schéma multirésolution d'analyse et de synthèse en ondelettes par l'approche banc de filtres

Le problème est de savoir comment obtenir un signal reconstruit identique au signal original ?

En utilisant les notations de la figure (4.1), on rappelle qu'une décimation par p implique (notation avec la transformée en z) :

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{p-1} X(z^{1/p} \cdot e^{-\frac{2\pi jk}{p}}) \quad (4.23)$$

Et une interpolation par p, $Y(z) = X(z^p)$

On peut donc écrire l'équation du banc de filtres analyse / synthèse sous la forme :

$$\Psi_{j,k,l}(x,y) = \{\Psi_{j,k}(x)\Psi_{j,l}(y), \Psi_{j,k}(x)\Phi_{j,l}(y), \Phi_{j,k}(x)\Psi_{j,l}(y)\} \quad (4.24)$$

D'après l'équation ci-dessous, de façon à éliminer la contribution de $X(-z)$ (version aliée du signal) au signal reconstruit, il est nécessaire et suffisant que les filtres soient tels que :

$$[H(z)G(z)] = C(z) \cdot [G(z) - \tilde{G}(-z)] \quad (4.25)$$

et, si on note :

$$M(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}(z) & \tilde{H}(-z) \\ \tilde{G}(z) & \tilde{G}(-z) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Il vient que : $\det M(z) = \tilde{H}(z)\tilde{G}(-z) - \tilde{H}(-z)\tilde{G}(z) = P(z) - P(-z)$ alors, pour avoir une reconstruction parfaite, avec des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF), il est nécessaire et suffisant que : $\det M(z) = c \cdot z^{-2l-1}$

où

En pratique, on prend $c=2$. Les filtres associées à des fonctions d'échelles et ondelettes orthogonales sont dits orthogonaux respectivement (biorthogonaux) si les fonctions de bases associées sont biorthogonales.

Dans les deux cas la propriété de reconstruction parfaite du banc de filtres garantit que le signal reconstruit sera identique à l'original à une différence de phase près. Comme on le verra dans la section 4.5, l'intérêt des filtres biorthogonaux est la liberté additionnelle d'avoir des filtres à phase linéaire de longueur arbitraire. En effet il est bien connu que seul le banc de filtres RIF réels ayant une phase linéaire est celui des filtres de Haar. Aussi pour obtenir des filtres RIF réels plus longs, et avoir toujours une phase linéaire, il faut s'affranchir de l'orthogonalité.

L'analyse et la synthèse des signaux par l'approche « banc de filtres » et l'analyse multirésolution sont deux concepts équivalents. D'un point de vue traitement du signal, une ondelette est un filtre passe-bande. De plus dans le cas dyadique, il s'agit d'un filtre octave bande. Alors la transformée ondelette peut être interprétée comme un filtrage à Q-constant avec un ensemble de filtres octave-bande suivis d'un échantillonnage aux fréquences de Nyquist respectives (correspondant à la bande passante d'une octave particulier). Il est donc clair qu'en ajoutant des fréquences plus hautes, on ajoute plus de détails ou plus de résolution au signal.

Réciproquement soit V_0 l'espace de toutes les fonctions de bandes limitées dans les fréquences $[-\pi, +\pi]$, alors il existe un ensemble des fonctions $\{\Phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$, qui forment une base orthonormale de V_0 . De façon similaire, soit V_1 l'ensemble des fonctions bandes limitées dans les fréquences $[-2\pi, +2\pi]$, alors l'ensemble des fonctions $\{\Phi(2x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ appartient à V_1 . Or $V_1 = V_0 \oplus W_0$,

alors W_0 est l'espace des fonctions bandes limitées dans les fréquences $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$, en répétant ce schéma d'analyse V_i est l'espace des fonction bandes limitées dans l'intervalle $[-2^i\pi, +2^i\pi]$, et W_i l'espace des fonctions bandes limitées de fréquence dans $[-2^{(i+1)}\pi, -2^i\pi] \cup [2^i\pi, 2^{(i+1)}\pi]$. On retrouve le schéma classique de l'analyse multirésolution.

Compte tenu de la relation directe qui existe entre le banc de filtres et les fonctions de bases associées la construction des fonctions d'échelle et d'ondelette se ramènent à la construction des filtres.



D. Construction et présentation de quelques ondelettes

Dans les sections précédentes, nous avons discuté des propriétés essentielles d'une analyse multi résolution et présenté l'analogie avec la théorie des bancs de filtres. La mise en œuvre des algorithmes nécessite cependant la construction des fonctions Φ, Ψ éventuellement $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$ ou d'une manière équivalente les filtres d'analyse \tilde{H}, \tilde{G} et synthèse H, G . Nous abordons quelques aspects liés à la construction des ondelettes sur la droite réelle et sur un intervalle. Nous présentons également quelques familles d'ondelettes couramment utilisées en traitement du signal. Mais avant nous rappelons les propriétés importantes souhaitées pour une ondelette.

- Orthogonalité. Si les ondelettes sont orthogonales, la TOD est parfaite et la décomposition numérique est stable. Si l'analyse multirésolution est orthogonale, les opérateurs de projection dans les sous-espaces conduisent à des approximations optimales au sens de $L^2(\mathbb{R})$
- Support compact. Si la fonction d'échelle Φ et la fonction ondelette Ψ sont à supports compacts, les filtres H et G sont des filtres RIF. Ce qui est requis dans les implémentations. Si elles ne sont pas à support compact, une décroissance rapide est souhaitable de sorte que les filtres puissent être raisonnablement approchés par des filtres RIF.
- Coefficients rationnels. Pour une implémentation informatique, il est souhaitable que les coefficients h_k, g_k soient rationnels ou mieux dyadiques. Les multiplications ou divisions par des puissances de 2 se ramènent à des simples décalages de bits.
- Symétrie. Si la fonction d'échelle est symétrique et l'ondelette antisymétrique, alors les filtres sont à phase linéaire. L'absence de cette propriété entraîne une distorsion de phase lors de la reconstruction.
- Régularité. La régularité d'une ondelette est importante pour des applications de compression, l'introduction des contraintes de régularité dans la construction des ondelettes permet d'améliorer la qualité de la reconstruction [49].
- Nombre de moments nuls. Le nombre de moments nuls caractérise la puissance d'approximation des ondelettes, en effet les ondelettes avec N moments nuls permettent une approximation exacte des combinaisons linéaires de tous les polynômes de degré $< N$. Il existe une interdépendance entre la régularité et le nombre de moments nuls.
- Interpolation. Si la fonction d'échelle satisfait $\Phi(k) = \delta(k), \forall k \in \mathbb{Z}$, alors la fonction de V_j qui interpole les données échantillonnées sur la grille de pas 2^{-j} est simplement constituée des valeurs de la fonction échantillonnée.

Il n'est toujours pas possible de construire des ondelettes ayant toutes ces propriétés, il faut faire un compromis qui dépend des applications, en compression la régularité et le nombre de moments nuls sont des facteurs importants [49], [50]. Plusieurs travaux existent dans la littérature sur l'évaluation de l'impact du choix de l'ondelette dans les algorithmes de compression.

Les travaux de Villasenor et al [51] et de Odegard et al [52] ont permis d'évaluer plusieurs catégories de filtres d'ondelettes et de présenter des familles particulières avec de bonnes propriétés de régularité et d'approximation. Nous présentons ci-après quelques familles d'ondelettes classiques et des ondelettes particulières ayant de bonnes propriétés pour les applications de compression. Notre objectif étant d'utiliser ces différentes ondelettes dans notre approche de compression des images RSO.

1. Ondelettes orthogonales

La construction d'ondelettes orthogonales est liée à la notion d'analyse multirésolution orthogonale. Il s'agit d'une analyse multirésolution où les espaces W_j sont définis comme étant le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} . Par conséquent tous les espaces $W_j, j \in \mathbb{Z}$ sont mutuellement orthogonaux.

Pour qu'une analyse multirésolution soit orthogonale, une condition suffisante est :

$$W_0 \perp V_0 \Leftrightarrow \langle \Psi, \Phi(\cdot - l) \rangle = 0, \forall l \in \mathbb{Z}$$

En utilisant la formule sommatoire de Poisson on voit que cette condition est équivalente à :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \sum_k \hat{\Psi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\Phi}(\omega + 2\pi k)} = 0 \quad (4.27)$$

Une fonction d'échelle orthogonale est une fonction Φ telle que l'ensemble $\{\Phi(x - l), l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthogonale, c'est-à-dire : $\langle \Phi, \Phi(\cdot - l) \rangle = \delta_l, l \in \mathbb{Z}$ (4.28)

avec une telle fonction, la collection de fonctions $\langle \Phi, \Phi(\cdot - l) \rangle = \delta_l, l \in \mathbb{Z}$ forme base orthonormale de V_0 et la collection de fonctions $\{\Phi_{j,l}, l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de V_j . Par la formule de Poisson 4.28 devient ,

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \sum_k |\hat{\Phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (4.29)$$

2. Quelques ondelettes orthogonales

- Ondelette de Haar

Un exemple des plus classiques est la fonction de Haar :

$$\Phi_{jk}(x) = \begin{cases} 2^{-j/2} & \text{pour } 2^j(k-1) \leq x \leq 2^j k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

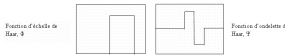


Figure 4.3 – Fonctions d'échelle et ondelette de Haar

$$\Psi_{jk}(x) = \begin{cases} 2^{-j/2} & \text{pour } 2^j(k-1) \leq x \leq 2^j(k-1/2) \\ -2^{-j/2} & \text{pour } 2^j(k-1/2) \leq x \leq 2^j(k+1) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Cette fonction a les propriétés suivantes :

$$\int \Psi(x) dx = 0$$

$$\int \Phi(x) dx = 1 \quad (4.30)$$

L'ondelette de Haar n'a qu'un seul moment nul. Si on effectue une projection d'une fonction sur cette base, la projetée aura une allure de fonction en escalier. Si on désire plus de régularité, il faut utiliser des fonctions avec plus de moments nuls.

- Ondelettes de Daubechies

De nombreux chercheurs ont développé des méthodes de construction de filtres d'ondelettes, Daubechies proposa en 1988 une construction d'ondelettes orthogonales à support compact tout comme les fonctions de Haar [53] (Daubechies 1 noté D_1 n'est autre que l'ondelette de Haar). Une ondelette de

Daubechies ayant ν moments nuls vérifie l'équation de dilatation. On a respectivement :

$$\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2\nu-1} h_{k+1} \Phi(2x-k)$$

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2\nu-1} g_{k+1} \Phi(2x-k) \quad (4.31)$$

Les coefficients $h_k, g_k = (-1)^{kh}{}_{-k+1}$ pour $k=1, 2, \dots, 2\nu$ satisfont les contraintes suivantes :

- Consistance. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à l'équation de dilatation est :

$$\sum_{k=1}^{2\nu} h_k = \sqrt{2} \quad (4.32)$$

- Orthogonalité. Les translatées et les dilatées entières de Φ, Ψ forment une famille orthogonale si les coefficients de l'équation de dilation satisfont :

$$\sum_{k=1}^{2\nu} h_k h_{k-2m} = \delta_m, \forall m \quad (4.33)$$

La relation (4.33) assure les relations d'orthogonalité :

$$\int \Phi(x-k) \Phi(x-l) dx = \delta_{kl}$$

$$\int \Psi(x-k) \Psi(x-l) dx = \delta_{kl}$$

De la définition des g_k on déduit la relation : $\int \Phi(x-k) \Psi(x-l) dx = 0$

- Approximation. La contrainte

$$\sum_{k=1}^{2\nu} (-1)^k k^m h_{k+1} = 0, m=0, 1, \dots, \nu-1 \quad (4.34)$$

conduit au fait que $\Psi(x)$ a ν moments nuls c'est-à-dire :

$$\int \Psi(x) x^m dx = 0, m=0, 1, \dots, \nu-1$$

Cela signifie qu'il est possible d'approcher une fonction régulière avec une erreur $O(\alpha^\nu)$ par des combinaisons linéaires des ondelettes à l'échelle α .

- La compacité des supports.

Le domaine de $\Phi(x)$ est $[0, 2\nu-1]$

Le domaine de $\Psi(x)$ est $[-\nu+1, \nu]$

Le problème tel que posé avec les différents contraintes a été résolu par I. Daubechies et a conduit à la famille d'ondelette de Daubechies D_ν dont nous présentons quelques représentants ci-dessous :

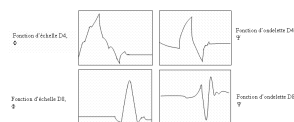


Figure 4.4 – Fonction d'échelle et d'ondelette et ondelette de I. Daubechies

Les Coiflets

Les coiflets sont un cas particulier d'ondelettes de Daubechies. Elles ont été construites à la demande de Beylkin, Coifman et Rokhlin. Le problème posé pour cette construction particulière était de comprimer des opérateurs intégraux qui conduisent la plupart du temps à des matrices denses. Il s'agissait donc de combiner les coefficients de l'espace V_L . Comme vu précédemment, plus Ψ a des moments nuls, plus on aura de coefficients ondelettes nuls. Cette observation serait

utile si on avait des moments nuls pour Φ lorsque $l > 0$.

Par conséquent, les Coiflets vérifient :

$$|Supp \Phi| = |Supp \Psi| = 2\nu - 1$$

$$\int \Phi(x) dx = 1,$$

$$\int \Phi(x) x^l dx = 0,$$

$$\int \Psi(x) x^l dx = 0,$$

Pour $l = 1, 2, \dots, L-1$

3. Ondelettes biorthogonales

La propriété d'orthogonalité, quoique requise pour certaines applications, impose de fortes contraintes sur la construction des ondelettes. En effet on démontre qu'il n'existe pas d'ondelettes à support compacts, symétriques et orthogonales.

Par conséquent on introduit la généralisation des ondelettes biorthogonales. Pour cette construction on considère une fonction d'échelle duale $\tilde{\Phi}$ et une fonction ondelette duale $\tilde{\Psi}$ qui génèrent une analyse multirésolution avec les sous-espaces \tilde{V}_j, \tilde{W}_j tels que :

$$\tilde{V}_j \perp W_j, V_j \perp \tilde{W}_j \quad (4.35)$$

Et par conséquent :

$$\tilde{W}_j \perp W_{j'} \text{ pour } j \neq j'$$

Une analyse multirésolution duale n'est nécessairement pas la même que celle générée par les fonctions primaires (sinon c'est une analyse orthogonale). Les conditions d'orthogonalité (4.35) conduisent aux relations :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}, \Psi(-l) \rangle &= \langle \tilde{\Psi}, \Phi(-l) \rangle = 0 \\ \langle \tilde{\Phi}, \Phi(-l) \rangle &= \delta_l, \langle \tilde{\Psi}, \Psi(-l) \rangle = \delta_l, \forall l \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Par ailleurs pour $\tilde{\Phi}_{j,l}, \tilde{\Psi}_{j,l}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_{j,l}, \Phi_{j,l'} \rangle &= \delta_{l-l'} \forall l, l', j \in \mathbb{Z} \\ \langle \tilde{\Psi}_{j,l}, \Psi_{j,l'} \rangle &= \delta_{j-j'} \delta_{l-l'} \forall l, l', j, j' \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les conditions de biorthogonalité s'écrivent alors dans le domaine fréquentiel sous la forme :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \begin{cases} \sum_k \hat{\Phi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\Phi}(\omega + 2\pi k)} = 1 \\ \sum_k \hat{\Psi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\Psi}(\omega + 2\pi k)} = 1 \\ \sum_k \hat{\Psi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\Phi}(\omega + 2\pi k)} = 0 \\ \sum_k \hat{\Phi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\Psi}(\omega + 2\pi k)} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Comme les fonctions $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ définissent une analyse multirésolution duale, elles satisfont :

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0} \tilde{h}_k \tilde{\Phi}(2x - k), \tilde{\Psi}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0} \tilde{g}_k \tilde{\Phi}(2x - k) \quad (4.39)$$

De même, on définit les fonctions de transfert \tilde{H}, \tilde{G} similaire à H et G. Elles vérifient les conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \begin{cases} \tilde{H}(\omega) \overline{\tilde{H}(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{\tilde{H}(\omega + \pi)} = 1 \\ \tilde{G}(\omega) \overline{\tilde{G}(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \overline{\tilde{G}(\omega + \pi)} = 1 \\ \tilde{G}(\omega) \overline{\tilde{H}(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \overline{\tilde{H}(\omega + \pi)} = 0 \\ \tilde{H}(\omega) \overline{\tilde{G}(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{\tilde{G}(\omega + \pi)} = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Si on pose $M(\omega) = \begin{bmatrix} H(\omega) & H(\omega + \pi) \\ G(\omega) & G(\omega + \pi) \end{bmatrix}$ (4.40) devient $M(\omega) \overline{M'(\omega)} = I$, I étant la matrice identité.

La résolution de ce système donne :

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\omega) &= \frac{\overline{G(\omega + \pi)}}{\det M(\omega)} \\ \tilde{G}(\omega) &= -\frac{\overline{H(\omega + \pi)}}{\det M(\omega)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Les opérateurs de projections prennent alors la forme :

$$\begin{aligned} P_j f &= \sum_l \langle f, \tilde{\Phi}_{j,l} \rangle \Phi_{j,l} \\ Q_j f &= \sum_l \langle f, \tilde{\Psi}_{j,l} \rangle \Psi_{j,l} \end{aligned} \quad (4.42)$$

De l'équation (4.42), on note que tous les coefficients ondelettes sont calculés par $\tilde{\Phi}$ pour $P_j f$ et $\tilde{\Psi}$ pour $Q_j f$. D'après (4.36), (4.39), on déduit que :

$$h_{k-2l}^{\sim} = \langle \tilde{\Phi}(x-l), \Phi(2x-k) \rangle \text{ et } g_{k-2l}^{\sim} = \langle \tilde{\Psi}(x-l), \Phi(2x-k) \rangle$$

De plus, en remarquant que $\Phi(2x-k) \in V_1$, on peut faire une décomposition sur V_0 et W_0 , on obtient :

$$\Phi(2x-k) = \sum_l h_{k-2l}^{\sim} \Phi(x-l) + \sum_l g_{k-2l}^{\sim} \Psi(x-l)$$

Cette formule s'applique également à $\tilde{\Phi}$, les fonctions primaires et duales étant interchangeable.

Les contraintes (4.40) s'écrivent en termes de filtres :

$$\sum_n h_{2n-l}^{\sim} h_{2n-k} + g_{2n-l}^{\sim} g_{2n-k+1} = \delta_{kl} \quad (4.43)$$

On a alors $g_n = (-1)^{n+1} h_{-n}^{\sim}$, $\tilde{g}_n = (-1)^{n+1} h_{-n}$

Par ailleurs on a : $\sum_n h_n h_{n+2k}^{\sim} = \delta_{k,0}$

4. Quelques ondelettes biorthogonales

Ondelettes biorthogonales splines

Daubechies, Cohen, et Feauveau ont développé des ondelettes biorthogonales à partir des fonctions splines cardinales [54]. Les relations permettant de spécifier les fonctions de transfert sont les suivantes :

$\det M(\omega) = e^{-i\omega}$ et par conséquent :

$$G(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{\tilde{H}(\omega + \pi)}, \tilde{G}(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$$

On définit :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sqrt{2} \sum_n h_n e^{-i\omega n} \\ \tilde{H}(\omega) &= \sqrt{2} \sum_n \tilde{h}_n e^{-i\omega n} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dans le cas biorthogonal, il est possible de choisir H tel qu'il correspond à un filtre à phase linéaire, c'est-à-dire possédant une fonction d'échelle symétrique. Le filtre associé à H avec une phase linéaire vérifie :

$$H(\omega) = e^{-i\lambda\omega} |H(\omega)|, \lambda \in \mathbb{Z}$$

avec pour h_n réel, $H(-\omega) = H(\omega)$ ou d'une manière équivalente $H(\omega)$ est un polynôme en $\cos(\omega)$. $H(\omega)$ défini de cette manière n'inclut pas le cas des filtres

de Haar dont la fonction d'échelle est symétrique autour de $x = 1/2$. Ce qui correspond à : $H(-\omega) = e^{i\omega} H(\omega)$ ou de manière équivalente, $H(\omega) = e^{-i\omega/2} \cos(\omega/2)$.

Il s'agit de déterminer H et \tilde{H} qui vérifient :

$$H(\omega)\overline{\tilde{H}(\omega)} + H(\omega + \pi)\overline{\tilde{H}(\omega + \pi)} = 1 \quad (4.45)$$

Le résultat ci-après permet de déterminer h_n, \tilde{h}_n .

Soit H et \tilde{H} un polynôme trigonométrique à coefficients réels satisfaisant : $H(\omega) = e^{i\chi\omega/2} (\cos(\omega/2))^N p(\cos(\omega))$ avec $p(-1) \neq 0, N$ entier positif et $\chi = 1$ si N impaire et 0 sinon

S'il existe des solutions \tilde{H} à (4.45), alors elles sont de la même forme que H, c'est-à-dire, $\tilde{H}(\omega) = e^{i\tilde{\chi}\omega/2} (\cos(\omega/2))^{\tilde{N}} \tilde{p}(\cos(\omega))$ avec $\tilde{p}(-1) \neq 0, \tilde{N}$ entier positif et $\tilde{\chi} = 1$ si \tilde{N} impaire et 0 sinon

De plus, et sont contraints par :

$$p(\cos(\omega)) \cdot \tilde{p}(\cos(\omega)) = \sum_{n=0}^{K-1} \binom{K-1+n}{n} (\sin^2 \omega/2)^n + (\sin^2 \omega/2)^K R(\cos(\omega)) \quad (4.46)$$

où $N + \tilde{N} = 2K$ et R est un polynôme impair.

Si on prend $p=1, R=0$, il vient que :

$$H(\omega) = \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^N = \sum_{n=-[N/2]}^{N-[N/2]} 2^{-N} \binom{N}{n+[N/2]} e^{-i\omega n}$$

où $[N/2]$ désigne le plus grand entier inférieur à $N/2$.

On retrouve les coefficients correspondant à la fonction d'échelle spline.

Le filtre \tilde{H} qui a la même symétrie que H est alors donné par :

$$\tilde{H}(\omega) = e^{i\tilde{\chi}\omega/2} (\cos(\omega/2))^{\tilde{N}} \sum_{n=0}^{K-1} \binom{K-1+n}{n} (\sin^2 \omega/2)^n$$

Si on prend comme dans le cas orthogonal :

$$H(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^N z^{-[N/2]}$$

alors

$$\tilde{H}(z) = z^{-\tilde{N}+\tilde{\chi}/2} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{\tilde{N}} \sum_{n=0}^{K-1} \binom{K-1+n}{n} \left(\frac{z^{-1}-2+z}{4} \right)^{\tilde{n}} \quad (4.47)$$

Les supports de $\Phi, \tilde{\Phi}$ sont :

$$Supp \Phi = supp H = \left[\frac{-N-\chi}{2}, \frac{N+\chi}{2} \right]$$

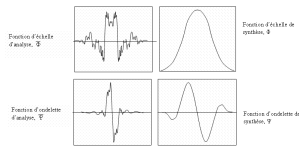
$$Supp \tilde{\Phi} = supp \tilde{H} = \left[-(K-1) - \frac{N-\chi}{2}, K-1 + \frac{N+\chi}{2} \right]$$

5. Ondelettes sur un intervalle

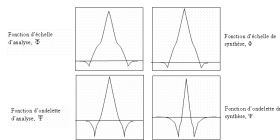
Les approches basées sur l'analyse multirésolution dans les espaces $L^2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}$ ont été développées dans la littérature [46],[47]. Une construction de bases d'ondelettes semi-orthogonales sur un intervalle en utilisant les fonctions d'échelle B-splines de degré k arbitraire [48] a été réalisé dans des travaux antérieurs.

La décomposition de l'image dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas appropriée d'un point de vue pratique, l'image étant toujours limitée à un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$. L'analyse et la synthèse ondelettes dans $L^2(D)$ serait plus adaptée pour tenir compte des effets

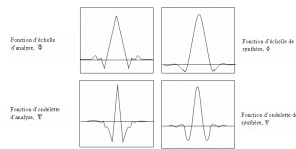
de bord dans l'image ; dans les méthodes classiques, il se pose un problème d'extension périodique du signal au delà des bords de l'image, ce qui crée éventuellement des discontinuités qui sont néfastes au codage.



Fonctions d'échelle et d'ondelette bi-orthogonales splines, correspondant à $N = \tilde{N} = 3$



Fonctions d'échelle et d'ondelette bi-orthogonales splines, correspondant à $N = \tilde{N} = 2$



Fonctions d'échelle et d'ondelette bi-orthogonales splines, ($N=7, \tilde{N}=9$) utilisées par Antonini et al dans [2]

Figure 4.5 - Exemples d'ondelettes bi-orthogonales splines

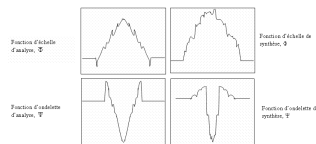


Figure 4.6 - Fonctions d'échelle et ondelette Villasenor et al [1]

Dans $L^2(\Omega)$, une seule fonction d'échelle ne suffit plus pour la construction de la TOD, les fonctions de bases ne sont plus déduites par les translations et dilatations d'une seule fonction d'échelle ou d'une seule ondelette mère.

Une construction de base biorthogonale spline sur un intervalle a été réalisé par Dahmen et al [47]. Les bancs de filtres d'analyse et de synthèse associés sont présentés en annexe A. Pour simplifier l'implémentation, les opérations de convolution et de décimation avec des filtres qui varient avec la position temporelle du signal ont été ramenées à une multiplication matricielle simple.

E. Transformées en ondelettes par l'approche de "Lifting Scheme"

Dans cette section, nous présentons la mise en œuvre des transformées ondelettes par une nouvelle approche dite "lifting scheme" [55], [56] (LS) basée sur la factorisation de la matrice polyphase des transformées ondelettes classiques. Cette nouvelle approche permet une implémentation rapide et par ailleurs d'obtenir des transformées ondelettes à coefficients entiers qui facilitent la mise en œuvre des algorithmes de compression sans perte des images RSO.

Nous montrons comment toute TOD ou tout schéma d'analyse et de synthèse en bancs de filtres RIF peut être décomposé en une suite finie d'étages de filtrage dans le domaine spatial qu'on appelle "étages lifting" (EL).

Cette décomposition est possible et bien connue des algébristes dans l'anneau commutatif des polynômes de Laurent à coefficients réels. L'intérêt de cette approche est qu'elle a une complexité algorithmique réduite par rapport aux méthodes classiques. Elle permet aussi d'étendre les TOD à des signaux ayant un pas d'échantillonnage irrégulier ou même d'envisager des constructions ondelettes dans des espaces généralisés ; par exemple la construction des ondelettes sphériques [57]

1. Factorisation des transformées en ondelettes discrètes par l'approche "Lifting Scheme" (TODLS)

Cette partie présente la relation étroite qui existe entre les filtres à réponse impulsionnelle finie et les polynômes de Laurent. De façon similaire, les bancs de filtre d'analyse ou de synthèse des signaux sont caractérisés par des matrices dont les coefficients sont des polynômes de Laurent. La factorisation de ces matrices aboutit à la mise en oeuvre des transformées en ondelettes discrètes par l'approche (LS) que l'on notera (TODLS) [58]



Fondamental : Filtres à réponse impulsionnelle finie et polynômes de Laurent

Un filtre H est un opérateur linéaire qui est complètement défini par sa réponse impulsionnelle $h_k \in \mathbb{R} / k \in \mathbb{Z}$. Le filtre H a une réponse impulsionnelle finie lorsqu'un nombre fini seulement de coefficients h_k est non nul. On désigne par k_b respectivement k_e le plus petit et le plus grand entier k tel que $h_k \neq 0$. La z-transformée de H est alors un polynôme de Laurent de la forme : $H(z) = \sum_{k=k_b}^{k=k_e} h_k z^{-k}$

Dans le cadre de nos applications, nous utiliserons exclusivement les filtres à réponses impulsionnelle finie qui permettent d'obtenir des bases d'ondelettes à support compacts. Dans toute la suite, le symbole H désignera à la fois le filtre de coefficients h_k et le polynôme de Laurent.

Le degré du polynôme de Laurent est défini par $Deg(H) = k_e - k_b$. Il en découle que le degré du polynôme de Laurent H est égal à la longueur du filtre plus un. On sait par ailleurs que l'ensemble des polynômes de Laurent à coefficients réels noté $R[z, z^{-1}]$ a une structure d'anneau commutatif. Le produit d'un polynôme de Laurent de degré l par un polynôme de Laurent de degré l' est un polynôme de degré l+l'. Dans cet anneau, on peut définir la division euclidienne de deux polynômes de Laurent a(z) et b(z), avec $b(z) \neq 0$ et $Deg(a) \geq Deg(b)$. On montre qu'il existe toujours deux polynômes de Laurent q(z) et r(z) (non nécessairement uniques) tels que :

$$a(z) = b(z)q(z) + r(z), \text{ avec } Deg(q) = Deg(a) - Deg(b) \text{ et } Deg(r) < Deg(b)$$

On utilisera aussi les matrices 2 X 2 de polynômes de Laurent de la forme :

$$M(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

Ces matrices forment un anneau que l'on note $M(2; R[z, z^{-1}])$. Dans cet anneau l'ensemble des matrices inversibles est constitué des matrices dont le déterminant est un monôme, on note cet ensemble $GL(2; R[z, z^{-1}])$. Toute matrice de $GL(2; R[z, z^{-1}])$ est dite unitaire et paraunitaire si $((M(z))^{-1}) = (M(z^{-1}))^T$





Fondamental : La transformée en ondelettes discrètes et la représentation polyphase

La transformée en ondelettes discrètes est mise en oeuvre classiquement en itérant un banc de filtres sur la composante basse fréquence du signal, l'étage d'analyse utilise deux filtres suivi d'une décimation d'un échantillon sur deux, l'étage de synthèse à l'inverse réalise une interpolation du signal et un filtrage avec H et G (voir figure 4.1).

Les conditions de reconstruction parfaite du signal par le banc de filtres sont données par : $H(z)\tilde{H}(z^{-1})+G(z)\tilde{G}(z^{-1})=2$

$$H(z)\tilde{H}(-z^{-1})+G(z)\tilde{G}(-z^{-1})=0$$

On définit la matrice de modulation par : $M(z)=\begin{bmatrix} H(z) & H(-z) \\ G(z) & G(-z) \end{bmatrix}$

De même on peut écrire de façon analogue la matrice de modulation duale,

$$\tilde{M}(z)=\begin{bmatrix} \tilde{H}(z) & \tilde{H}(-z) \\ \tilde{G}(z) & \tilde{G}(-z) \end{bmatrix}$$

Les conditions de reconstruction parfaite peuvent alors s'écrire de manière compacte par la relation :

$$(\tilde{M}(z^{-1}))^T M(z)=2I \quad (4.48)$$

I représente la matrice identité 2 X 2. Les filtres $\tilde{H}, \tilde{G}, H, G$ étant à réponse impulsionnelle finie, il découle que $\tilde{M}(z)$ et $M(z)$ appartiennent à $GL(2; R[z, z^{-1}])$.

Dans les cas des ondelettes orthogonales $M(z)=\tilde{M}(z)$

La représentation polyphase du filtre H est donnée par : $H(z)=H_e(z^2)+z^{-1}H_o(z^2)$;

où H_e contient les coefficients pairs du filtre H, H_o contient les coefficients impairs.

On a alors : $H_e(z)=\sum_k h_{2k} z^{-k}$

et $H_o(z)=\sum_k h_{2k+1} z^{-k}$

où : $H_e(z^2)=\frac{H(z)+H(-z)}{2}$

et $H_o(z^2)=\frac{H(z)-H(-z)}{2}$

On définit la matrice polyphase associée aux filtres H et G par :

$$P(z)=\begin{bmatrix} H_e(z) & G_e(z) \\ H_o(z) & G_o(z) \end{bmatrix}$$

On a alors, $P(z^2)^T = \frac{1}{2} M(z) \begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{bmatrix}$

On définit de manière similaire $\tilde{P}(z)$.

La transformée ondelette est alors représentée schématiquement par :

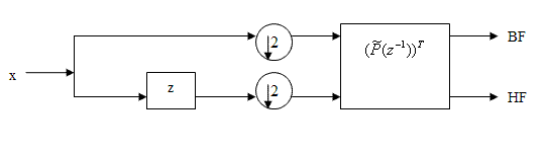


Figure 4.7 - Etage d'analyse de la TOD utilisant la matrice polyphase

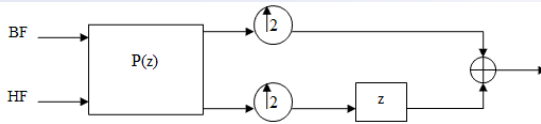


Figure 4.8 - Etage de synthèse de la TOD utilisant la matrice polyphase

L'équation de reconstruction parfaite s'écrit :

$$P(z)\tilde{P}(z^{-1})^t = I \quad (4.49)$$

L'équation (4.49) implique $\det P(z)$ et son inverse sont des polynômes de Laurent, ce qui n'est possible que si $\det P(z)$ est un monôme en z de la forme : $\det P(z) = cz^l$; on en déduit que $P(z)$ et $\tilde{P}(z)$ appartiennent à $GL(2; R[z, z^{-1}])$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\det P(z) = 1$, c'est à dire $P(z) \in SL(2; R[z, z^{-1}])$. En effet, si le déterminant est non nul, on peut diviser G_e et G_o par Cz^l , ce qui revient à une multiplication et un décalage des coefficients des filtres G_e et G_o .

le problème de la détermination des filtres RIF pour la transformée en ondelettes revient à trouver une matrice polyphase $P(z)$ de déterminant égal à 1.

De la relation (4.49) on en déduit : $\tilde{H}_e(z) = G_o(z^{-1})$,

$$\tilde{H}_o(z) = -G_e(z^{-1}),$$

$$\tilde{G}_e(z) = -H_o(z^{-1}),$$

$$\tilde{G}_o(z) = H_e(z^{-1}).$$

Ce qui implique que : $\tilde{G}(z) = z^{-1}H(-z^{-1})$

et $\tilde{H}(z) = -z^{-1}G(-z^{-1})$

L'exemple le plus simple de la matrice polyphase est donné par $P(z) = I$. Il en résulte que : $H(z) = \tilde{H}(z) = 1$ et $G(z) = \tilde{G}(z) = z^{-1}$. Cette transformée ondelette triviale est souvent appelée "Lazy Wavelet Transform 3 (LWT)



Fondamental : Le Lifting Scheme

Le LS est une relation entre deux bancs de filtres à reconstruction parfaite ayant le même filtre passe bas ou le même filtre passe haut.

Définition

Une paire de filtres (H, G) est dite complémentaire si la matrice polyphase correspondante $P(z)$ a un déterminant égal à 1. Si (H, G) est complémentaire alors (\tilde{H}, \tilde{G}) l'est aussi.

- Théorème 4.1 (Etape de Lifting)

Soit (H, G) une paire complémentaire de filtres, alors tout autre filtre passe-haut G' telle (H, G') que soit une paire complémentaire de filtres est de la forme :

$$G'(z) = G(z) + H(z)s(z^2)$$

(4.50)

où $s(z)$ est un polynôme de Laurent. Réciproquement tout de la forme (4.50) permet d'obtenir une paire complémentaire de filtres avec H .

- Preuve

Les composants polyphase de $H(z)s(z^2)$ sont $H_e(z)s(z)$ et $H_o(z)s(z)$, la nouvelle matrice polyphase s'écrit :

$$w \quad P'(z) = P(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette opération ne change pas la valeur du déterminant qui est toujours égal à 1. Le théorème peut être réécrit par rapport aux filtres \tilde{H} et \tilde{H}' . Dans cette

formulation la matrice polyphase duale est donnée par : $\tilde{P}'(z) = \tilde{P}(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix}$

le nouveau filtre \tilde{H}' est donné par $\tilde{H}'(z) = \tilde{H}(z) - \tilde{G}(z)s(z^{-2})$.



Fondamental : Théorème 4.2 (Etape de Lifting duale)

Soit (H, G) une paire complémentaire de filtres, alors toute autre filtre passe-bas H' telle que (H', G) soit une paire complémentaire de filtres de la forme :

$$H'(z) = H(z) + G(z)t(z^2) \quad (4.51)$$

où $t(z)$ est un polynôme de Laurent. Réciproquement tout filtre de la forme 4.51 permet d'obtenir une paire complémentaire de filtres avec G .

La nouvelle matrice polyphase après l'étape de "Lifting" duale est donnée par :

$$P'(z) = P(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix}$$

En réécrivant le théorème par rapport aux filtres \tilde{G} et \tilde{G}' on obtient :

$$\tilde{P}'(z) = \tilde{P}(z) \begin{bmatrix} 1 & -t(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec $\tilde{G}'(z) = \tilde{G}(z) - \tilde{H}(z)t(z^{-2})$

Les étapes de Lifting et de Lifting Duale sont successivement utilisées pour construire une transformée en ondelettes discrètes à partir de la transformée en ondelettes discrètes triviale correspondant à la séparation des composants polyphase du signal. Dans les paragraphes suivants, nous allons montrer que toute transformée en ondelettes discrètes peut être décomposée comme une succession alternée d'étapes de Lifting et de Lifting duale. Mais avant nous rappelons dans l'annexe A un résultat sur la division euclidienne dans l'anneau des polynômes de Laurent.



Fondamental : Algorithme de factorisation de la matrice polyphase

Nous présentons une méthode de factorisation en étapes Lifting de toute paire complémentaire de filtres (H, G) . Remarquons tout d'abord que $H_e(z)$ et $H_o(z)$ sont relativement premiers, en effet tout facteur commun à $H_e(z)$ et $H_o(z)$ divise nécessairement le déterminant de la matrice polyphase $P(z)$. Or celui-ci est égal à 1. On peut donc dérouler l'algorithme d'Euclide sur les polynômes $H_e(z)$ et $H_o(z)$ et leur p.g.d.c sera un monôme. Compte tenu de la non unicité du quotient et du reste de la division euclidienne des polynômes de Laurent, on peut toujours choisir les quotients $q_i(z)$ de sorte que le p.g.d.c soit en définitive une constante.

Soit K cette constante, on peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} H_e(z) \\ H_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n q_i(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $\text{Deg}(H_o) > \text{Deg}(H_e)$, le premier quotient $q_1(z)$ de l'algorithme d'Euclide sera

nul. On peut supposer sans perte de généralité que n est pair, en effet sinon, on peut multiplier le filtre H(z) par z et G(z) par $-z^{-1}$. Ces opérations ne changent pas le déterminant de la matrice polyphase.

Etant donné le filtre H, on peut toujours trouver un filtre G^0 tel que (H, G^0) soit une paire complémentaire de filtres, avec :

$$P^0(z) = \begin{bmatrix} H_e(z) & G_e^0(z) \\ H_o(z) & G_o^0(z) \end{bmatrix} \left(\prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

La dernière matrice diagonale est choisie de telle sorte que $DetP^0(z)=1$. On observe que :

$$\begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i(z) & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant cette dernière relation, on en déduit :

$$P(z) = \left(\prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

Finalement en vertu du théorème 4.1, les matrices polyphases $P(z)$ et $P^0(z)$ ayant le même filtre complémentaire H, on en déduit : $P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Il en résulte le théorème :



Fondamental : Algorithme de factorisation de la matrice polyphase

Nous présentons une méthode de factorisation en étapes Lifting de toute paire complémentaire de filtres (H,G). Remarquons tout d'abord que $H_e(z)$ et $H_o(z)$ sont relativement premiers, en effet tout facteur commun à $H_e(z)$ et $H_o(z)$ divise nécessairement le déterminant de la matrice polyphase P(z). Or celui-ci est égal à 1. On peut donc dérouler l'algorithme d'Euclide sur les polynômes $H_e(z)$ et $H_o(z)$ et leur p.g.d.c sera un monôme. Compte tenu de la non unicité du quotient et du reste de la division euclidienne des polynômes de Laurent, on peut toujours choisir les quotients $q_i(z)$ de sorte que le p.g.d.c soit en définitive une constante.

Soit K cette constante, on peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} H_e(z) \\ H_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $Deg(H_o) > Deg(H_e)$, le premier quotient $q_1(z)$ de l'algorithme d'Euclide sera nul. On peut supposer sans perte de généralité que n est pair, en effet sinon, on peut multiplier le filtre H(z) par z et G(z) par $-z^{-1}$. Ces opérations ne changent pas le déterminant de la matrice polyphase.

Etant donné le filtre H, on peut toujours trouver un filtre G^0 tel que (H, G^0) soit une paire complémentaire de filtres, avec :

$$P^0(z) = \begin{bmatrix} H_e(z) & G_e^0(z) \\ H_o(z) & G_o^0(z) \end{bmatrix} \left(\prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

La dernière matrice diagonale est choisie de telle sorte que $DetP^0(z)=1$. On

observe que : $\begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i(z) & 1 \end{bmatrix}$

En utilisant cette dernière relation, on en déduit :

$$P(z) = \left(\prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

Finalement en vertu du théorème 4.1, les matrices polyphases $P(z)$ et $P^0(z)$ ayant le même filtre complémentaire H, on en déduit : $P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Il en résulte le théorème :



Fondamental : Théorème 4.3

Etant donné une paire complémentaire de filtres (H,G), il existe toujours une suite de polynômes de Laurent $s_i(z)$ et $t_i(z)$ pour $1 \leq i \leq m$ et une constante K telles que :

$$P(z) = \left(\prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

La matrice polyphase dual $\tilde{P}(z)$ est alors donnée par :

$$\tilde{P}(z) = \left(\prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_i(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t_i(z^{-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

Ce résultat prouve que tout banc de filtres d'ondelettes peut être décomposé en une succession alternée d'étages de Lifting.

La mise en oeuvre de la TOD par l'approche LS peut alors être schématisée de la

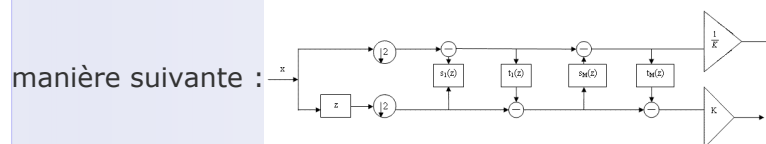


Figure 4.9 - Transformée en ondelettes discrètes par l'approche "Lifting scheme"

La transformée inverse est représentée ci-après :

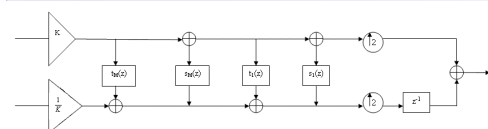


Figure 4.10 - Transformée inverse en ondelettes discrètes par l'approche "Lifting scheme"



Fondamental : Factorisation de quelques ondelettes

Les filtres sont désignés par leur dénomination habituelle par exemple Haar pour l'ondelette de Haar, (N, \tilde{N}) pour les ondelettes de Cohen, Daubechies [54], où N (respectivement) \tilde{N} représente le nombre de moments nuls de \tilde{G} (respectivement) de G, ou encore par (l_a, l_s) où l_a est la longueur du filtre d'analyse et l_s la longueur du filtre de synthèse.



Fondamental : Ondelettes de Haar

Au facteur de normalisation près, le banc de filtres de Haar est :

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on peut écrire la matrice polyphase sous la

$$\text{forme : } P(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice polyphase duale est donnée par :

$$P(z) = \tilde{P}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui permet d'obtenir un algorithme rapide de la transformée en ondelettes de Haar sous la forme :

Algorithme 4.1 Algorithme Lifting Scheme pour un niveau de la TOD de Haar

arguments : x désigne le signal à transformer par la TOD de Haar, s désigne le signal basse fréquence, d désigne le signal haute fréquence, N représente le nombre d'échantillons du signal x

- pour $l=0$ à $(N/2)-1$ faire
 - $s_l^{(0)} = x_{2l}$, /* $s_l^{(0)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $d_l^{(0)} = x_{2l+1}$, /* $d_l^{(0)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $d_l = d_l^{(0)} - s_l^{(0)}$
 - $s_l = s_l^{(0)} + \frac{1}{2} d_l$

fin pour

Algorithme 4.2 Algorithme Lifting Scheme pour un niveau de la TOD inverse de Haar

arguments : x désigne le signal reconstruit, s désigne le signal basse fréquence, d désigne le signal haute fréquence, N représente le nombre d'échantillons du signal x

- pour $l=0$ à $(N/2)-1$ faire
 - $s_l^{(0)} = s_l - \frac{1}{2} d_l$, /* $s_l^{(0)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $d_l^{(0)} = d_l + s_l^{(0)}$, /* $d_l^{(0)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $x_{2l+1} = d_l^{(0)}$
 - $s_l = s_l^{(0)}$

fin pour



Fondamental : Ondelettes de Daubechies D4

Les filtres H et G sont données par :

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3}$$

$$G(z) = -h_3 z^2 + h_2 z^1 - h_1 + h_0 z^{-1}$$

avec $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$,

La matrice polyphase s'écrit alors :
$$\begin{bmatrix} h_0 + h_2 z^{-1} & -h_3 z - h_1 \\ h_1 + h_3 z^{-1} & h_2 z + h_0 \end{bmatrix}$$

Une factorisation associée s'écrit :

$$P(z) = \tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}(\sqrt{3}-2)z^{-1} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

On en déduit que :
$$P(z^{-1})^t = \begin{bmatrix} \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{(\sqrt{3}-2)z}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Cette factorisation permet d'en déduire les algorithmes suivants pour la TOD Daubechies D_4 et son inverse :

Algorithme 4.3 Algorithme Lifting Scheme pour un niveau de la TOD de Daubechies D_4

arguments : x désigne le signal à transformer par la TOD de daubechies D_4 , s désigne le signal basse fréquence, d désigne le signal haute fréquence, N représente le nombre d'échantillons du signal x

- pour $l=0$ à $(N/2)-1$ faire
 - $d_l^{(1)} = x_{2l+1} - \sqrt{3} x_{2l}$, /* $d_l^{(1)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $s_l^{(1)} = x_{2l} + \frac{\sqrt{3}}{4} d_l^{(1)} + \frac{(\sqrt{3}-2)}{4} d_{l+1}^{(1)}$, /* $s_l^{(1)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $d_l^{(2)} = d_l^{(1)} + s_{l-1}^{(1)}$, /* $d_l^{(2)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $s_l = \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} s_l^{(1)}$
 - $d_l = \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} d_l^{(2)}$
- fin pour

Algorithme 4.4 Algorithme Lifting Scheme pour un niveau de la TOD inverse de Daubechies D_4

arguments : x désigne le signal reconstruit, s désigne le signal basse fréquence, d désigne le signal haute fréquence, N représente le nombre d'échantillons du signal x

- pour $l=0$ à $(N/2)-1$ faire
 - $d_l^{(2)} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} d_l$, /* $d_l^{(1)}$ et $d_l^{(2)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $s_l^{(1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} s_l$, /* $s_l^{(1)}$ Valeurs intermédiaires*/
 - $d_l^{(1)} = d_l^{(2)} - s_{l-1}^{(1)}$
 - $x_{2l} = s_l^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{4} d_l^{(1)} - \frac{(\sqrt{3}-2)}{4} d_{l+1}^{(1)}$
 - $x_{2l+1} = d_l^{(1)} + \sqrt{3} x_{2l}$
- fin pour



Fondamental : Formule générale de la TODLS

D'une manière générale l'algorithme de mise en oeuvre de la TODLS et de la TODLS inverse se présente de la manière suivante :

Algorithme 4.5 TOD par l'approche Lifting scheme (TODLS)

arguments : x désigne le signal à transformer, s désigne le signal basse fréquence, d désigne le signal haute fréquence, N représente le nombre d'échantillons du signal x , L_s désigne le nombre d'étages LS.

initialisation : s et d par les composants polyphase de x

- pour $l=0$ à $l=\frac{N}{2}$ faire
 - $s_l^{(0)} = x_{2l}$
 - $d_l^{(0)} = x_{2l+1}$
- fin pour
- pour $l=0$ à $l=\frac{N}{2}$ faire
 -
 - pour $i=1$ à $i=L_s$ pas 1 faire
 - $d_l^{(i)} = d_l^{(i-1)} - \sum_k p_k^{(i)} s_{l-k}^{(i-1)}$
 - $s_l^{(i)} = s_l^{(i-1)} - \sum_k u_k^{(i)} d_{l-k}^{(i)}$
 -
 - fin pour
 - $d_l = d_l^{(L_s)}$
 - $s_l = s_l^{(L_s)}$
- fin pour

Algorithme 4.6 TOD inverse par l'approche Lifting scheme

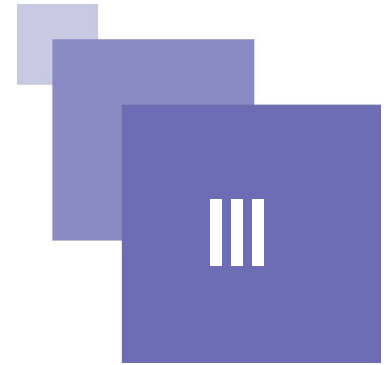
arguments : x désigne le signal reconstruit, s désigne le signal basse fréquence, d désigne le signal haute fréquence, N représente le nombre d'échantillons du signal x , L_s désigne le nombre d'étages LS.

initialisation : $s^{(L_s)} = s, d^{(L_s)} = d$, /* s et d ont $N/2$ échantillons */

- pour $l=0$ à $l=\frac{N}{2}$ faire
 - pour $i=L_s$ à $i=1$ pas -1 faire
 - $s_l^{(i-1)} = s_l^{(i)} - \sum_k u_k^{(i)} d_{l-k}^{(i)}$
 - $d_l^{(i-1)} = d_l^{(i)} - \sum_k p_k^{(i)} s_{l-k}^{(i-1)}$
 -
 - fin pour
 - $x_{2l+1} = d_l^{(0)}$
 - $x_{2l} = s_l^{(0)}$
- fin pour

Les coefficients p_k^i et u_k^i sont spécifiques à l'ondelette utilisée et proviennent de la factorisation de la matrice polyphase de l'ondelette. ($1 \leq i \leq L_s, k \in \mathbb{Z}$)

Transformées en paquets d'ondelettes discrètes



Les paquets d'ondelettes	33
Détermination des coefficients de la décomposition en paquets d'ondelettes d'un signal monodimensionnel x	35
Notion de fonction de coût d'information additive	36

Les "paquets d'ondelettes" et "paquets de multiondelettes" généralisent les concepts des chapitres 4 et 5, tout en partant du formalisme de base qui a été développé, c'est-à-dire les filtres (multifiltres) d'analyse et de synthèse. Il s'agit de construire une collection de fonctions de base de laquelle peut être extraite toutes sortes de bases, en particulier les bases d'ondelettes (multiondelettes), les fonctions de Walsh, les bases "paquets d'ondelettes" à oscillations rapides [91], [92].

Pour cette construction, nous définissons d'abord les paquets d'ondelettes continus sur \mathbb{R} qui ont des fonctions de carré intégrable avec certaines propriétés de régularité, nous présentons ensuite l'extension aux paquets de multiondelettes. Enfin sont abordés les aspects liés à l'implémentation des algorithmes. Les notions relatives aux fonctions de coût et au choix de la meilleure base en paquets d'ondelettes (multiondelettes) relativement à un critère spécifié sont également présentées. Nous explicitons la mise en oeuvre de la transformée en paquets d'ondelettes (multiondelettes) dans le cas des filtres orthogonaux, l'extension au cas biorthogonal devient alors plus aisée.

Nous mettons en oeuvre trois algorithmes de compression des images RSo, donc deux algorithmes de compression avec perte contrôlée basés respectivement sur la transformée en paquets d'ondelettes (TPOQS) et la transformée en paquets de multiondelettes (TPMOQS). Et enfin un algorithme de compression sans perte basée sur la transformée en paquets d'ondelettes à coefficients entiers implémenté via l'approche Lifting scheme (TOPOLSE).

A. Les paquets d'ondelettes

Soit $\{h_k\}$ une séquence de valeurs vérifiant $\sum_n h_{n-2k} h_{n-2l} = \delta_{kl}$ et $\sum_n h_n = \sqrt{2}$.

Soit $g_k = (-1)^k h_{1-k}$.

H et G correspondent aux filtres définis au chapitre 4. Considérons les opérateurs :

$$F_0\{s_k\}(j) = \sum_k s_k h_{k-2j}$$

$$F_1\{s_k\}(j) = \sum_k s_k g_{k-2j} \quad (6.1)$$

Considérons les opérateurs adjoints associés définis par :

$$F_0^*\{s_j\}(k) = \sum_j s_j h_{k-2j}$$

$$F_1^*\{s_j\}(k) = \sum_j s_j g_{k-2j} \quad (6.2)$$

Compte tenu des propriétés d'orthogonalité, on a :

$$F_0^* F_0 + F_1^* F_1 = I \quad (6.3)$$

Considérons la suite de fonctions définies récursivement par :

$$\left\{ \begin{aligned} W_{2n}(t) &= \sqrt{2} \sum_k h_k W_n(2t-k) \\ W_{2n+1}(t) &= \sqrt{2} \sum_k g_k W_n(2t-k) \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Les fonctions $W_0(t)$ respectivement $W_1(t)$ peuvent être assimilées à $\Phi(t)$, respectivement $\Psi(t)$, définies au chapitre 4.

On a par transformée de Fourier : $\hat{W}_0(\omega) = H(\omega/2) \cdot \hat{W}_0(\omega/2)$

ce qui permet de déduire que : $\hat{W}_0(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega)$.

De même

$$\hat{W}_1(\omega) = G(\omega/2) \cdot \hat{W}_0(\omega/2) = G(\omega/2) \cdot H(\omega/2^2) \cdot H(\omega/2^3) \dots = G(\omega/2) \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-(j+1)}\omega)$$

Si on pose :

$$m_0(\omega) = H(\omega)$$

$$m_1(\omega) = G(\omega)$$

On vérifie facilement que (6.4) est équivalent à : $\hat{W}_n(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_{\varepsilon_j}(2^{-j}\omega)$

où $n = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 2^{j-1}$ avec $\varepsilon_j = 0, 1$

A partir des relations (6.4), on peut réécrire :

$$W_{2n}(t-l) = \sqrt{2} \sum_j h_{j-2l} W_n(2t-j) = F_0\{\sqrt{2} W_n(2t-j)\}(l)$$

$$W_{2n+1}(t-l) = \sqrt{2} \sum_j g_{j-2l} W_n(2t-j) = F_1\{\sqrt{2} W_n(2t-j)\}(l)$$

où $\sqrt{2} W_n(2t-j)$ est considéré comme une suite pour (n,t) fixés.

En utilisant les relations précédentes, on peut écrire :

$$W_n(t-j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i h_{j-2i} W_{2n}(\frac{t}{2}-i) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i g_{j-2i} W_{2n+1}(\frac{t}{2}-i)$$

Pour $n=0$, on obtient :

$$W_0(t-j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i h_{j-2i} W_0(\frac{t}{2}-i) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i g_{j-2i} W_1(\frac{t}{2}-i)$$

Cette relation permet de retrouver la décomposition usuelle de f dans l'espace :

$$f(t) = \sum_k s_k^0 W_0(t-k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i F_0(s_k^0)(i) W_0(\frac{t}{2}-i) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i F_1(s_k^0)(i) W_1(\frac{t}{2}-i)$$

D'une manière générale, définissons l'espace :

$$\Omega_n = \{x : x = \sum_k c_k W_n(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$$

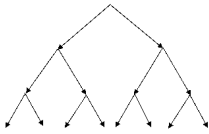


Figure 6.2 - Arbre binaire associé à la décomposition en paquets d'ondelettes sur toute la collection des bases

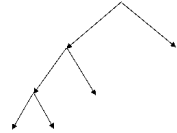


Figure 6.3 - Arbre binaire associé à la décomposition en ondelettes

Cette décomposition du signal permet plusieurs choix des bases de représentation. La base d'ondelettes correspond au choix du sous-arbre ci-après :

Le choix de sous-arbres différents permet d'obtenir d'autres bases paquets d'ondelettes.

Soit A_L le nombre de sous-arbres sur les coefficients représentés sur la figure précédente. On a la relation : $A_0=1$ et $A_{L+1}=1+A_L^2$

ce qui implique que $A_{L+1} > 2^{2^L}$. Si le signal comporte $N=2^L$ échantillons, alors on aura plus de 2^N bases orthogonales. Dès lors, il est judicieux de définir des critères pour le choix de la meilleure base par paquets d'ondelettes.

C. Notion de fonction de coût d'information additive

Une fonction M de $l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction de coût additive si elle vérifie :

$$M(0)=0,$$

$$M(\{x_i\}) = \sum_i M(x_i)$$

1. Quelques exemples de fonctions de coût

- Nombre de coefficients au dessus d'un certain seuil
Pour un seuil arbitraire ϵ fixé, on compte les coefficients dont la valeur absolue est supérieure à ϵ . Cette fonction de coût donne le nombre de coefficients nécessaires à la transmission du signal pour une précision ϵ .

- Concentration en norme l^p ; $p < 2$
On choisit un nombre arbitraire $p < 2$ et on définit $M(x) = \|\{x\}\|_p$. On observe que plus la norme l^p d'une fonction d'énergie 1 est petite, plus concentrée est son énergie sur peu de coefficients.

- Entropie
On définit l'entropie au sens de Shannon-Weaver d'une séquence $x = \{x_j\}$ par $\eta(x) = -\sum_j p_j \log p_j$, où $p_j = \frac{|x_j|^2}{\|x\|^2}$ et on impose $\log p = 0$ pour $p = 0$.

Cette fonction de coût n'est pas additive, par contre $\lambda(x) = \sum_j |x_j|^2 \log |x_j|^2$ l'est.



Par la relation $\eta(x) = \|x\|^{-2} \lambda(x) + \log \|x\|^2$, minimiser $\lambda(x)$ revient à minimiser $\eta(x)$.

Un fait classique à propos de l'entropie est que $\exp(\eta(x))$ est proportionnel au nombre de coefficients nécessaires pour représenter un signal à une erreur quadratique moyenne fixée.

- Logarithme de l'énergie

Soit $M(x) = \sum_j \log |x_j|^2$ avec $\log |x_j|^2$ choisi égal à 0, lorsque $x_j = 0$. On peut l'interpréter comme un processus de Gauss-Markov composé de N variables aléatoires Gaussiennes de variance $\sigma_1^2 = |x_1|^2, \dots, \sigma_N^2 = |x_N|^2$. La redéfinition du log pour 0 est équivalente à ignorer toute composante inchangée du processus.

Minimiser cette fonction conduit à la meilleure approximation de la base de Karhunen-Loève, pour le processus qui atteint le minimum global de M sur tout groupe orthogonal. D'autres fonctions de coût peuvent être envisagées en fonction des applications. Nous avons des fonctions de coût particulières pour la compression avec une contrainte de débit binaire, nous y reviendrons dans la section qui présente notre algorithme de compression des images RSO basé sur les transformées en paquets d'ondelettes discrètes.

Les fonctions de coût d'information additives sont des fonctionnelles sur un ensemble de bases orthonormales c'est à dire sur le groupe orthogonal. Dans les cas pratiques, les ensembles sont compacts et donc il existe un minimum global.

Formellement, étant donné M et x un vecteur d'espace V. Soit B une base de la collection des bases de paquets d'ondelettes, considérons Bx une séquence des coefficients de x dans la base B.

Définition

La meilleure base pour $x \in V$ relative à M est B telle que M(Bx) est minimale.

a) Recherche de la meilleure base de décomposition en paquets d'ondelettes

La meilleure base est construite de manière récursive de la façon suivante :

La collection des bases paquets d'ondelettes est représentée par un arbre.

Soit k un paramètre d'échelle.

Soit $B_{n,k}$ la base associée à l'intervalle $I_{n,k} = [2^k n, 2^k(n+1)]$ (Voir section 6.2) et $A_{n,k}$ la meilleure base pour x projeté sur les $B_{n,k}$. On construit $A_{n,k+1}$ pour tout $n \geq 0$ de la manière suivante :

$$A_{n,k+1} = \begin{cases} B_{n,k+1} & \text{si } M(B_{n,k+1}x) < M(A_{2n,k}x) + M(A_{2n+1,k}x) \\ A_{2n,k} \oplus A_{2n+1,k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Implémentation

Les algorithmes de décomposition en paquets d'ondelettes ont été mis en œuvre en utilisant une structure d'arbre implémentée simplement sur un tableau avec une numérotation adéquate des nœuds de l'arbre. A chaque nœud on a associé une valeur de la fonction de coût et une variable logique spécifiant si le nœud appartient ou non à la meilleure base. La décomposition en paquets d'ondelettes utilise les mêmes filtres (orthogonaux et biorthogonaux) présentés aux chapitres 4.

En général trois méthodes de décomposition en paquets d'ondelettes sont utilisés :

- La transformée ondelettes classique présentée dans les sections précédentes
- La méthode du meilleur niveau : On parcourt l'arbre de niveau en niveau et on

calcule la fonction de coût de chaque niveau. On retient alors le niveau ayant une fonction de coût minimal

- La méthode de la meilleure base : Il s'agit de la méthode la plus utilisée car elle procure la fonction de coût la plus faible des trois méthodes. On part de l'avant dernier niveau de l'arbre (le niveau L-1) et on remonte vers la racine (niveau 0).

On applique l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \text{coût}_{\text{père}} \leq \text{coût}_{\text{fils}} \Rightarrow \text{Coût} = \text{coût}_{\text{père}} \\ \text{Sinon} \Rightarrow \text{Coût} = \text{coût}_{\text{fils}} \end{array} \right\}$$

Grâce à cette méthode, on obtient le coût minimal de l'arbre et un partitionnement non régulier en fréquence du plan temps-fréquence (espace - fréquence).