Principes généraux de quantification d'une source

Table des matières

Objectifs

L'objet de ce module est de rappeler les résultats fondamentaux de quantification scalaire, quantification vectorielle d'une source. Ces résultats préliminaires seront utilisés dans notre méthodologie de compression des images de télédétection. La quantification scalaire étant un cas particulier de la quantification vectorielle, nous présenterons d'abord dans une première partie les concepts associés à la quantification vectorielle.

Quantification Vectorielle

I

A. Définitions et principes de quantification Vectorielle

La quantification consiste en l'approximation d'un signal d'amplitude continue par un signal d'amplitude discrète. La quantification vectorielle (QV) [1] consiste à représenter tout vecteur x de dimension k par un autre vecteur y_i de même dimension, mais ce dernier appartenant à un ensemble fini Δ de L vecteurs. Les vecteurs y_i sont appelés vecteurs représentants, vecteurs de reproduction ou code-vecteurs. Δ est le dictionnaire ou le catalogue des formes. Nous représentons un vecteur x de l'espace R^k par une matrice colonne x(n) : $x=(x(1),x(2),\ldots,x(k))^T$ où $(.)^T$ indique l'opération de transposition d'une Matrice.

Un quantificateur vectoriel de dimension k et taille L peut être défini mathématiquement comme une application Q de R^k vers Δ .

Q : $R^k \rightarrow \Delta$

$x \rightarrow Q(x)=y_i$

avec $\Delta=\{y_i \in R^k / i=1,2,\ldots,L\}$

Cette application Q détermine implicitement une partition de l'espace source R^k en L régions C_i . Ces régions encore appelées classes ou régions de voronoï sont déterminées par : $C_i=\{x \in R^k / Q(x)=y_i\}$

Les conditions suivantes sont satisfaites : $\bigcup_{i=1}^{L} C_i=R^k$ et

$C_i \cap C_j=\emptyset, i\neq j, \forall_i, j=1,2,\ldots,L$

Quantification vectorielle appliquée au codage

La quantification vectorielle offre la combinaison des opérations d'encodage et de décodage (voir figure 2.1). En effet considérons I l'ensemble des L index des vecteurs de reproduction y_i du dictionnaire : $I=\{1,2,\ldots,L\}$, nous avons $\delta\, o\, E$ où la loi d'encodage est déterminée par : $E: R^k \rightarrow I$

$x \quad E(x)=i$

Et le processus de décodage est définie par : $\delta : i \rightarrow \Delta$

$i \quad \delta(i) = y_i$

Encodage

La procédure d'encodage consiste , pour tout vecteur x du signal d'entrée, à rechercher dans le dictionnaire Δ le code-vecteur y_i le « plus proche » de x. Nous introduisons la définition générale de la norme l_p , où pour un vecteur x de dimension k $l_p(x) = \sum_{n=1}^{k} |x(n)^p|$.

La distance entre deux vecteurs $x_{1,} x_2$ est alors : $(l_p(x_1 - x_2))^{1/p} = d(x_{1,} x_2) = [\sum_{n=1}^{k} |x_1(n) - x_2(n)|^p]^{1/p}$

La notion de proximité utilisé, encore appelée mesure de distorsion entre les vecteurs x et y_i correspond à la distance entre x et y_i au sens de la norme $l_p(x)$

En particulier nous utiliserons dans la plupart des algorithmes la distance euclidienne qui correspond à p=2. On a alors :

$$d(x, y_i) = d_2(x, y_i) = [\sum_{n=1}^{k} (x(n) - y_i(n))^2]^{1/2}$$

Les régions de Voronoï sont alors données par (voir exemple de la figure 2.2) $C_i = \{x \in R^k / Q(x) = y_i, si\, d(x, y_i) \leqslant d(x, y_j), \forall i \neq i\}$

Chaque région contient un ensemble de vecteurs de R^k et tous les vecteurs x qui appartiennent à C_i sont représentés par le même vecteur y_i du dictionnaire. La compression d'information est réalisée , car c'est uniquement l'index relatif au représentant y_i minimisant le critère de distorsion qui sera transmis ou stocké. Cette opération créant les pertes d'information transforme la QV en une opération irréversible, le signal quantifié ne pourra plus être restitué identiquement au signal original.

La quantité d'information requise pour représenter les vecteurs sources est donnée par R le débit binaire ou résolution, en bit par composante du vecteur ou bit par dimension ou encore bit par échantillon.(bpp). Ce débit peut être apprécier de deux façons :

- Soit il y a une contrainte de « débit fixe » et un code à longueur fixe (dit aussi « code naturel » est adopté. La QV permet alors des résolutions fractionnaires : $R = \frac{1}{k} \log_2 L$
- Soit il y a une contrainte « d'entropie fixe » (voir section 3). Un code à longueur variable (codage entropique) est construit après quantification afin de réduire encore le débit. R peut être estimé en calculant l'entropie du dictionnaire $H(\Delta)$. (il s'agit de l'entropie associée aux représentants) et il est admis que le débit binaire réel obtenu sera légèrement supérieur au débit obtenu. On accède aux probabilités d'occurrence p_i des codes-vecteurs y_i en modélisant la statistique de la source, où en procédant à l'aide d'une base d'apprentissage constituée d'un grand nombre d'échantillons représentatifs de la source, on a :

$$R \approx H(\Delta) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{L} p_i \log_2(p_i)$$

Décodage

Le décodeur est considéré comme un récepteur chargé de la reconstruction du signal , pour cela il doit disposer d'une copie identique du dictionnaire qu'il consulte afin de restituer le code vecteur source correspondant à l'index qu'il reçoit . Le décodeur réalise l'opération de décompression.

Evaluation des performances du système

Le but du système de codage est de réaliser le meilleur compromis entre le coût du codage et l'erreur faite . Il s'agit avec un débit minimal d'obtenir une distorsion moyenne faible caractérisant les performances globales du quantificateur vectoriel. Il est important que

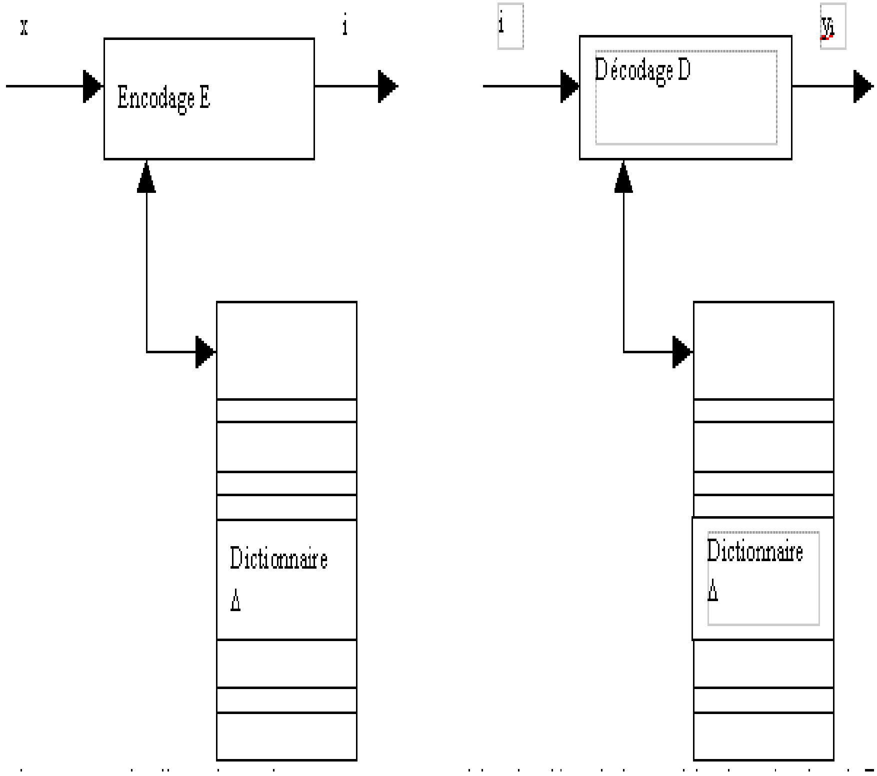
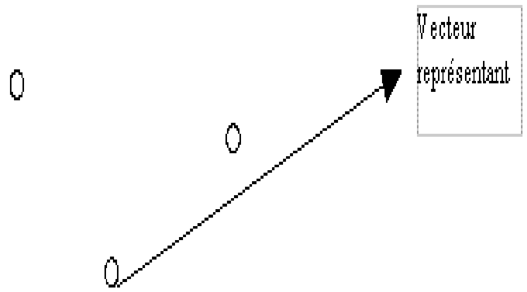


Figure 2.1 : Schéma synoptique d'un quantificateur vectoriel

la mesure de distorsion mise en œuvre caractérise la dégradation subjective du signal .Des mesures de distorsions pondérées prenant en compte des effets de masquages locaux peuvent envisagées pour tenir compte de la perception psycho-visuelle de l'œil humain.



l Figure 2.2 Schéma présentant les régions de voronoï associées au vecteurs représentants

B. Quantification Scalaire

1. Quantification Scalaire

Introduction

La quantification scalaire est une forme particulière de la QV, celle où la dimension des vecteurs est égal à un. La figure 2.3 illustre la caractéristique en marche d'escalier du plus simple des quantificateurs scalaires (QS),celui uniforme à débit fixe qui est entièrement déterminé par :

- les L+1 niveaux de décisions : $d_{0,} d_1, \ldots, d_L$ qui partitionnent en L intervalles égaux l'axe des réels R et détermine le pas de quantification.
- Les L valeurs de reproduction : qui sont les centres de masses de chacun des intervalles de décision.

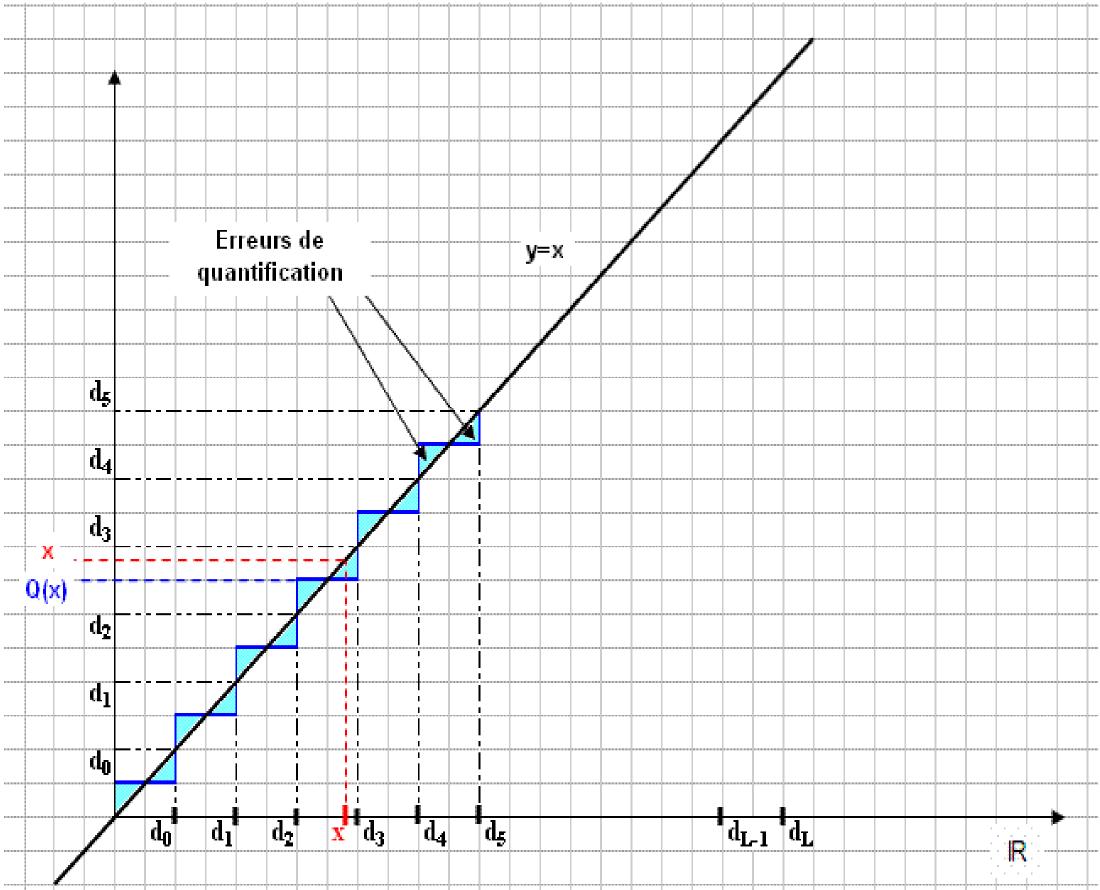


Figure 2.3 : Exemple d'un QS uniforme pour L=5.

Cet exemple bien connu permet d'introduire les différents bruits ou erreurs de quantification rencontrés :

- Le bruit granulaire qui se produit lorsque la valeur d'entrée x se situe dans l'une des cellules $[d_{i-1}, d_i]$, l'erreur résultante est la différence entre x et Q(x). Elle peut être majorée par un demi pas de quantification.
- Le bruit de surcharge ou dépassement qui se produit lorsque la valeur d'entrée se situe hors de l'intervalle $[d_{0,} d_L]$. La valeur de reproduction est alors soit y_1 , soit y_L , et l'erreur résultante peut être supérieure à un demi pas de quantification.

Quantification scalaire optimale

Le quantificateur optimal est celui qui minimise, pour une source donnée et sous la contrainte d'un débit maximal fixé ou d'une entropie maximale fixée , l'erreur moyenne de reconstruction due aux bruits de quantification. Les niveaux de reconstruction seront donc répartis en tenant compte de la densité de probabilité de la variable à quantifier.

Contrainte de débit fixe

Dans ce cas , on voit intuitivement que les seuils de décisions sont plus concentrés dans la zone de l'espace où la densité de probabilité des valeurs à quantifier est plus élevée . En supposant que les échantillons x proviennent de la réalisation d'un processus aléatoire stationnaire centrée X de densité de probabilité marginale $P_X(x)$ il s�到agit de minimiser l'EQM (nous désignons par E l'espérance mathématique) :

La distorsion moyenne est évaluée comme l'espérance $D = E((X - Q(x))^2)$

Ce qui s'écrit : $D=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-Q(x))^2 P_X(x)\,dx$

$$\sum_{i=1}^{L}\int_{d_{i-1}}^{d_i}(x-y_i)^2 P_X(x)\,dx$$

D est aussi la variance σ_Q^2 de l'erreur de quantification (le processus étant centré).

Il s'agit de trouver les partitions $[d_{i-1},d_i]$ et les représentants y_i minimisant D. Cette minimisation a une solution unique non explicite et le QS obtenu est connu sous le nom de quantificateur de Lloyd-Max [2] [3]. Il existe deux conditions nécessaires d'optimalité qui ne sont pas suffisantes (sauf dans le cas d'une variable gaussienne), il faut réunir :

- La meilleure partition qui vérifie « la règle du plus proche voisin » explicitée avec la connaissance de la mesure de distorsion.
- Les meilleurs représentants vérifiant la condition dite « du centroïde »(qui correspond au centre de gravité pour la mesure de distorsion EQM.) car le représentant choisi est la valeur moyenne de l'intervalle considérée.

La partie encodage du quantificateur (la partition) doit être optimal étant donnée la partie décodage (les meilleurs représentants) et réciproquement. On obtient :

$$y_i=\frac{\int_{d_{i-1}}^{d_i} xP_X(x)\,dx}{\int_{d_{i-1}}^{d_i} P_X(x)\,dx},\ 1\leqslant i\leqslant L$$

$$d_i=\frac{y_i+y_{i+1}}{2},1\leqslant i\leqslant L-1$$

$$d_0=-\infty,\ d_L=+\infty$$

En pratique la densité de probabilité du signal est inconnue. L'algorithme de Lloyd-Max procède alors par apprentissage en utilisant des données empiriques (La base d'apprentissage doit être suffisamment grande pour la pertinence des résultats). Nous décrirons dans la suite du chapitre l'algorithme de Llyod généralisé aux vecteurs de dimensions supérieures. Dans le cadre de l'hypothèse dite haute résolution qui consiste à admettre que le nombre L de niveaux de quantification est très élevé, il est possible d'obtenir explicitement l'expression de la puissance de l'erreur de quantification uniquement en fonction de $P_X(x)$ On obtient :

$$\sigma_Q^2=\frac{1}{12}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(P_X(x))^{\frac{1}{3}}\,dx\right)^3.2^{-2.R}$$

Pour une source stationnaire gaussienne centrée de variance σ_X^2 on obtient :

$$\sigma_Q^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\,\sigma_X^2\,2^{-2R}$$

Ces formules qui correspondent à un cas limite de quantification haute résolution sont utilisées pour servir de référence de comparaison entre quantificateurs. Gersho et al ont montré par ailleurs qu'un quantificateur non-uniforme est équivalent à un QS uniforme précédé d'une transformation non linéaire et suivi de la transformation inverse.

Contrainte d'entropie fixe

Ce mode de quantification appelé « quantification avec contrainte entropique » vise à minimiser la distorsion sous la contrainte que l'entropie du dictionnaire soit inférieure à R, le nombre du niveau de quantification est une variable du problème.

On a $H(\Delta) \leqslant R$, dans l'hypothèse haute résolution et en considérant le quantificateur de Llyod-Max sous la contrainte entropique $H(\Delta) \leqslant R$, l'analyse théorique montre que le QS optimal est simplement un QS uniforme suivit d'un codage entropique [4] [5]. On a alors : $\sigma_Q^2 = \frac{1}{12} 2^{2h(x)} . 2^{-2R}$

où H(X) est l'entropie différentielle qui caractérise la quantité d'information que possède une source sans mémoire (voir section 2.6). Dans le cas d'une source gaussienne centrée : $h(X) = 1/2 . \log_2(2\pi e \sigma_X^2)$ et donc $\sigma_Q^2 = \frac{\pi e}{6} \sigma_X^2 2^{-2R}$.

Le gain apporté par le quantificateur avec contrainte entropique est $(\frac{\sqrt{3}\pi}{2})/(\pi e/6) \approx 1{,}91$ soit 2.81 dB, Ce résultat est à rapprocher de la valeur asymtoptique $\sigma_Q^2 = \sigma_X^2 2^{-2R}$ donnée par la borne de Shannon (La limite théorique de la fonction débit-distorsion, ce résultat est présenté dans la section 2.6) .

Le QS avec contrainte entropique a une puissance d'erreur de quantification égale à $(\pi e/6) \approx 1{,}42$ fois cette limite, il est à $1/2 . \log_2(\pi e/6) \approx 0{,}25$ bit de la limite théorique.

C. Quantification vectorielle optimale

1. Quantification vectorielle optimale

Introduction

Comme présenté précédemment, quantifier revient à répartir dans un espace de dimension fixée un nombre déterminée de représentants, Ce nombre étant fonction du débit alloué au quantificateur. L'efficacité du quantificateur se mesure alors à la qualité de restitution du signal source qui doit être la plus fidèle possible . Pour une distribution statistique donnée de la source et un débit fixé, le quantificateur globalement optimal est celui qui minimise la distorsion moyenne, par contre le quantificateur localement optimal correspond à un dictionnaire qui est un minimum local de la fonction de distorsion moyenne. La théorie qui établit la supériorité de la QV sur la QS n'indique pas de méthode systématique de construction du dictionnaire globalement optimal. Seules des propriétés nécessaires sont connues et peuvent converger vers des dictionnaires localement optimaux. Le quantificateur localement optimal est celui qui vérifie pour un débit fixé les conditions [6][1]:

- L'encodeur optimal (pour un dictionnaire fixé), est celui qui respecte « la règle du plus proche voisin » qui est décrite par les régions des voronoï de l'espace R^k

  $C_i = \{x \in R^k / Q(x) = y_i, si\, d(x, y_i) \leqslant d(x, y_j), \forall\, i \neq i\}$.

- Le décodeur optimal (pour une partition donnée) est celui dont les vecteurs représentants y_i minimise la distorsion associée à la région de Voronoï C_i . y_i est le centroïde de cette région.

Une troisième condition est que la probabilité d'avoir un vecteur à coder à la même distance de deux représentants soit nulle , sinon ce vecteur est affecté à l'un des représentants, la partition optimale de l'espace n'est plus vérifié et les valeurs obtenues pour les vecteurs ne sont pas optimaux. Si les vecteurs sources sont à amplitude continue, cette condition est toujours vérifiée.

Algorithme de Lloyd généralisé

Les trois conditions précédentes conduisent à la conception d'un algorithme qui réalise, à partir d'une séquence d'apprentissage représentative de la statistique de la source à coder, la construction d'un dictionnaire localement optimal. Cet algorithme de classification , encore appelé algorithme des K-moyens (« K means ») est l'extension au cas vectoriel de l'algorithme de Lloyd-Max du cas scalaire. Il s'agit d'un algorithme d'optimisation itératif opérant à partir d'un dictionnaire initial. A chaque itération (dite « itération de Llyod ») deux opérations sont appliquées . (voir algorithme 2.1).

- Une classification suivant la règle d'encodage optimal
- Une optimisation suivant la règle de décodage optimal

Chaque itération de Lloyd (étapes 1 et 2) modifie localement le dictionnaire et réduit ou laisse inchangé la distorsion moyenne. L'algorithme converge en un nombre fini d'itérations vers le minimum local le plus proche du dictionnaire initial. Le choix de ce dernier est donc capital car il conditionne les résultats finaux. Plusieurs algorithmes ont été proposés pour le déterminer :

- Une initialisation aléatoire : Le dictionnaire le plus simple est celui qui contient les L premiers vecteurs de la suite d'apprentissage ou L vecteurs extraits aléatoires de cette suite. Ces vecteurs peuvent ne pas être représentatifs de la séquence d'apprentissage et conduire à des résultats médiocres

Entrée : Données de la séquence d'apprentissage

Initialisation du dictionnaire $\{y_1^0, y_2^0, \ldots\ldots\ldots y_i^0 \ldots\ldots\ldots y_L^0\}$

Répéter 1,2 ,3 tant que la condition d'arrêt 4 n'est pas vérifié

1-Classification

Pour chaque vecteur de la séquence d'apprentissage affecter une étiquette en utilisant la condition du plus proche voisin .

2-Optimisation

Pour la partition de l'espace des vecteurs d'apprentissage obtenue, calculer Les nouveaux représentants par la condition du centrosome.

$\{y_1^k, y_2^k, \ldots\ldots\ldots y_i^k \ldots\ldots\ldots y_L^k\}$

3-Calcul de la distorsion

$$D^k = \sum_{i=1}^{L} \sum_{x \in C_i} d(x, y_i^k)$$

4- Condition d'arrêt : $\left| \dfrac{D^k - D^{k+1}}{D^k} \right| \leq \varepsilon$

Sortie : Codebook $\{y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_i \ldots\ldots\ldots y_L\}$

Algorithme 2.1 : algorithme de Lloyd pour la construction d'un dictionnaire de Quantification vectorielle

- Un algorithme à seuil où au lieu de prendre L vecteurs aléatoirement , une distance minimale est fixée entre les éléments du dictionnaire initial. Cette méthode permet d'obtenir une meilleure représentativité que dans le cas précédent mais n'est pas toujours satisfaisante , le seuil étant difficile à déterminer car dépendant de la complexité de la séquence d'apprentissage.

- La méthode des « vecteurs produits », elle nécessite de quantifier scalairement les k composantes des vecteurs de la séquence d'apprentissage P_k sur niveaux $\prod_{i=1}^{k} P_i = L$ avec et d'effectuer un produit cartésien entre les dictionnaires de base pour obtenir les L représentants initiaux. Le traitement des composantes de manière indépendantes ne garantit pas un dictionnaire optimal, il est même possible d'obtenir des représentants initiaux non significatifs par rapport à la séquence d'apprentissage.
- Une méthode par dichotomie vectorielle qui est référencée comme étant l'algorithme LBG [6]. Elle combine à l'itération de Lloyd une technique dite de « Splitting ». Celle-ci consiste à découper chaque vecteur représentant y_i en deux nouveaux vecteurs $y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon$, (ε étant un vecteur de perturbation de faible énergie) avant d'appliquer au nouveau dictionnaire les itérations de Lloyd. Le dictionnaire initial est alors le centroïde de la séquence d'apprentissage , puis l'algorithme génère une succession de dictionnaires

Entrée : Données de la séquence d'apprentissage

Initialisation du dictionnaire $\{y_0^0\}$ (centroïde de la séquence d'apprentissage)

Répéter 1,2 ,3 ,4, tant que la condition d'arrêt 4 n'est pas vérifié

1-Splitting

Décomposer chaque représentant y_i^k en deux nouveaux représentants

$y_{2i}^k = y_i^k + \varepsilon$, $y_{2i+1}^k = y_i^k - \varepsilon$

2-Classification

Pour chaque vecteur de la séquence d'apprentissage affecter une étiquette en utilisant la condition du plus proche voisin .

3-Optimisation

Pour la partition de l'espace des vecteurs d'apprentissage obtenue, calculer Les nouveaux représentants par la condition du centroïde.

$\{y_0^k, y_1^k, \ldots\ldots\ldots y_{2^k}^k\}$

4-Calcul de la distorsion

$$D^k = \sum_{i=1}^{L} \sum_{x \in C_i} d(x, y_i^k)$$

5- Condition d'arrêt : $\left| \frac{D^k - D^{k+1}}{D^k} \right| \leq \varepsilon$

Sortie : Codebook $\{y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_i \ldots\ldots\ldots y_L\}$

Algorithme 2.2 : Algorithme LBG

Quelques Remarques

Le dictionnaire obtenu par l'algorithme LBG ne possède aucune structure topologique particulière , pour trouver le vecteur représentant correspondant à un vecteur de source à coder , L calculs de distorsions sont nécessaires. Cette procédure de recherche exhaustive au sein du dictionnaire a donc une complexité d'ordre $L=2^{Rk}$, R étant le débit binaire du code à longueur fixe. Ce bilan de complexité a conduit à envisager de nouvelles méthodes de quantification permettant un codage avec coûts calculatoires moindres. Nous citons à titre indicatif quelques unes de ces méthodes :

- La quantification vectorielle neuronale
- La quantification vectorielle par produit cartésien
- La quantification vectorielle multi-étages
- La quantification vectorielle prédictive et quantification vectorielle par transformée
- La quantification vectorielle avec un automate à états finis
- La quantification vectorielle récursive
- La quantification vectorielle en treillis
- La quantification vectorielle avec contrainte entropique
- La quantification vectorielle algébrique .....

D. Références bibliographiques

1)Gersho (A) et Gray (R.M) vector quantization and signal compression Boston, kluwer academic publishers 1992

2)Lloud (S.P) Least square quantization in PCM . IEEE trans. On Information Theory vol. 28 N° 2 mars 1982 pp 129-137

3)Max (J.) Quantizing for minimum distorsion IEEE trans. On information theory vol6 mars 1960 pp 7-12

4)G. Mercier Thèse de l'université de RENNES I , Etude des modèles de compression et de fusion des données satellitaires pour les images de Télédétection multisource dans le cadre d'une opération en temps réel pour les stations éloignées .

5)Berger T Minimum entropy quantizers and permutation codes. IEEE Trans. On Information Theory vol 28 1982.

6)Farvardin (N.) et modestino (J.W), Optimum quantizer performance for a class of non-gaussian memorless sources. IEEE Trans. On Information Theory Vol 30 mai 1984

7)Linde (Y), Buzo (A) and Gray (R.M) An algorithm for vector quantizer design. IEEE Trans on Communication vol 28 1980 pp 84-95 8)MacQueen (J). Some methods for classification and analysis of multivariate observations proc. Of the Fifth Berkerley symposium on Math Stat. And Prob. PP 281-296 1967